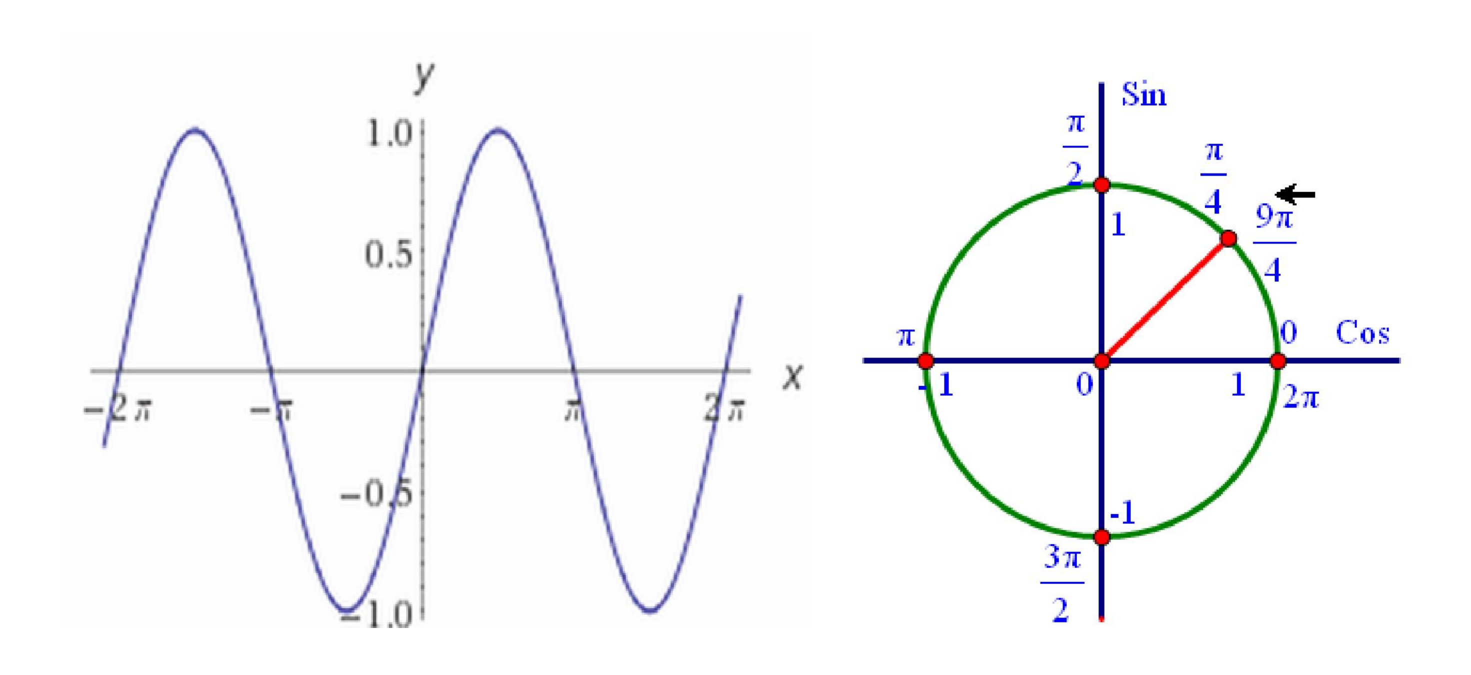
THẠC SĨ. TRẦN MẠNH HÂN

BÍ QUYẾT

GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

LƯỢNG GIÁC

- CÁC KĨ THUẬT GIẢI PHƯƠNG TRÌNH ĐẶC SẮC
- CÁC MẸO LOẠI NGHIỆM NHANH, CHÍNH XÁC
- CÁCH BẤM MÁY TÍNH TÌM HƯỚNG GIẢI.



HÀ NAM 8-2014

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC CẦN NẮM VỮNG

I. CÁC HỆ THỨC LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

❶ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$

❷ $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$

❸ $\dfrac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x} - 1$

❹ $\tan x.\cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

❺ $\begin{cases} \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x; \\ \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x \end{cases}$

❻ $\begin{cases} \sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) \\ \sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x\cos x) \end{cases}$

II. DẤU CỦA CÁC HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

	Góc I	Góc II	Góc III	Góc IV
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–
$\cot x$	+	–	+	–

III. MỐI QUAN HỆ CỦA CÁC CUNG LƯỢNG GIÁC ĐẶC BIỆT

① Hai cung đối nhau

$\cos(-x) = \cos x$ $\qquad$ $\sin(-x) = -\sin x$

$\tan(-x) = -\tan x$ $\qquad$ $\cot(-x) = -\cot x$

② Hai cung bù nhau

$\sin(\pi - x) = \sin x$ $\qquad$ $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$\tan(\pi - x) = -\tan x$ $\qquad$ $\cot(\pi - x) = -\cot x$

③ Hai cung phụ nhau

$\sin(\dfrac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $\qquad$ $\cos(\dfrac{\pi}{2} - x) = \sin x$

$\tan(\dfrac{\pi}{2} - x) = \cot x$ $\qquad$ $\cot(\dfrac{\pi}{2} - x) = \tan x$

④ Hai cung hơn nhau π

$\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\qquad$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\tan(\pi + x) = \tan x$ $\qquad$ $\cot(\pi + x) = \cot x$

⑤ Hai cung hơn nhau $\dfrac{\pi}{2}$

$\sin(\frac{\pi}{2}+x)=\cos x$ $\cos(\frac{\pi}{2}+x)=-\sin x$

$\tan(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x$ $\cot(\frac{\pi}{2}+x)=-\cot x$

⑥ Với k là số nguyên thì ta có:

$\sin(x+k2\pi)=\sin x$ $\cos(x+k2\pi)=\cos x$

$\tan(x+k\pi)=\tan x$ $\cot(x+k\pi)=\cot x$

IV. CÔNG THỨC CỘNG

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$	$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\cos x\sin y$
$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$	$\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$
$\tan(x+y)=\dfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y}$	$\tan(x-y)=\dfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y}$

Đặc biệt:

TH1: Công thức góc nhân đôi: $\begin{cases}\sin 2x=2\sin x\cos x\\ \cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x\\ \tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{cases}$

Hệ quả: Công thức hạ bậc 2: $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2};\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$

TH2: Công thức góc nhân ba: $\begin{cases}\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\\ \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\end{cases}$

V. CÔNG THỨC BIẾN ĐỔI TỔNG SANG TÍCH VÀ TÍCH SANG TỔNG

$\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$	$\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]$
$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$	$\sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y)-\cos(x-y)\right]$
$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}$	$\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right]$
$\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\sin\dfrac{x-y}{2}$	$\cos x\sin y=\dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y)-\sin(x-y)\right]$

Chú ý:

✍ $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

✍ $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

❶ $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right.$

❷ $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right.$

❸ $\tan u = \tan v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k\pi \\ u \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

❹ $\cot u = \cot v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k\pi \\ u \neq k\pi \end{cases}$

Đặc biệt:

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

Chú ý:

❖ Điều kiện có nghiệm của phương trình $\sin x = m$ và $\cos x = m$ là: $\boxed{-1 \leq m \leq 1}$.

❖ Sử dụng thành thạo câu thần chú ***" Cos đối - Sin bù - Phụ chéo"*** để đưa các phương trình dạng sau về phương trình cơ bản:

$\boxed{\sin u = \cos v \Leftrightarrow \sin u = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)}$

$\boxed{\cos u = \sin v \Leftrightarrow \cos u = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - v\right)}$

$\boxed{\sin u = -\sin v \Leftrightarrow \sin u = \sin(-v)}$

$\boxed{\cos u = -\cos v \Leftrightarrow \cos u = \cos(\pi - v)}$

❖ Đối với phương trình $\left[\begin{array}{l} \cos^2 x = 1 \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = \pm 1 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right.$ không nên giải trực tiếp vì khi đó phải giải 4 phương trình cơ bản thành phần, khi đó việc kết hợp nghiệm sẽ rất khó khăn. Ta nên dựa vào công thức $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ để biến đổi như sau: $\left[\begin{array}{l} \cos^2 x = 1 \\ \sin^2 x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 0$.

❖ Tương tự đối với phương trình $\left[\begin{array}{l} \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \\ \sin^2 x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos^2 x - 1 = 0 \\ 1 - 2\sin^2 x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = 0$.

Bài 1. Giải các phương trình sau

❶ $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

❷ $2\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0$

❸ $2\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} = 0$

❹ $3\tan\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3}$

Hướng dẫn giải:

❶ $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{3\pi}{4}$

Ta xác định ở phương trình này $u = x - \frac{\pi}{4}, v = \frac{3\pi}{4}$, nên dựa vào công thức nghiệm ta có

$x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ hoặc $x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x = \pi + k2\pi$; $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

❷ $2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❸ $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❹ $3\tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \tan\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} - x = \frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} - k\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

Chú ý: *Đối với phương trình $\tan x = m$ $(\tan x = m)$, trong đó m là hằng số thì điều kiện $\cos x \neq 0$ $(\sin x \neq 0)$ là không cần thiết.*

Bài 2. Giải các phương trình sau

❶ $\sin x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

❷ $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

❸ $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

❹ $\cot\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$

Hướng dẫn giải:

❶ $\sin x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} - k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$

❷ PT $\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} - x + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{3} + x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{36} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$.

❸ Do PT có dạng $\tan u = \tan v$ nên ta chỉ cần một điều kiện $\cos u \neq 0$ hoặc $\cos v \neq 0$. Để đơn giản ta chọn điều kiện: $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\pi$. Khi đó:

$\tan\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow 3x-\frac{\pi}{4}=x+\frac{\pi}{6}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{24}+k\frac{\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$.

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác thu được nghiệm của PT: $x=\frac{5\pi}{24}+k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z})$.

❹ Do có thể biến đổi PT về dạng $\tan u=\tan v$ nên ta chỉ cần một điều kiện $\cos u\neq 0$ hoặc $\cos v\neq 0$. Để đơn giản ta chọn điều kiện:

$\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)\neq 0\Leftrightarrow \frac{\pi}{6}-x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow x\neq -\frac{\pi}{3}-k\pi$.

PT $\Leftrightarrow \cot\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow \tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{3\pi}{4}-2x\right)$

$\Leftrightarrow x-\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{4}-2x+k\pi\Leftrightarrow x=\frac{11\pi}{36}+k\frac{\pi}{3}\ (k\in\mathbb{Z})$.

Kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác thu được nghiệm của PT: $x=\frac{11\pi}{36}+k\frac{\pi}{3},(k\in\mathbb{Z})$.

Bài 3. Giải các phương trình sau

❶ $4\cos^2 x-2(\sqrt{3}+1)\cos x+\sqrt{3}=0$

❷ $2\cos^2 x+5\sin x-4=0$

❸ $\sqrt{3}\tan^2 x-(1+\sqrt{3})\tan x+1=0$

❹ $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2 x$

Hướng dẫn giải:

❶ PT $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\frac{1}{2}\\ \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\pm\frac{\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z})$.

❷ PT $\Leftrightarrow 2(1-\sin^2 x)+5\sin x-4=0\Leftrightarrow 2\sin^2 x-5\sin x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=2\ \text{(loại)}\\ \sin x=\frac{1}{2}\ \text{(t/m)}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

❸ PT $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right.\Leftrightarrow 2\sin^2 x-5\sin x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=2\ \text{(loại)}\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ và $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$, $(k\in\mathbb{Z})$.

❹ PT $\Leftrightarrow\frac{1-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}{2}=\frac{1+\cos 2x}{2}\Leftrightarrow\sin 2x=-\cos 2x\Leftrightarrow\tan 2x=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{8}+k\frac{\pi}{2}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau

❶ $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin 2x-\frac{1}{2}$

❷ $\sin^4\frac{x}{2}+\cos^4\frac{x}{2}=1-2\sin x$

❸ $2(\sin^4 x+\cos^4 x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0$ ❹ $\sin^6 x+\cos^6 x=\cos 4x$

Hướng dẫn giải:

❶ PT $\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x\cos^2 x=\sin 2x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\sin 2x-\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x-2\sin 2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=-1\\ \sin 2x=3\ (\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow 2x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}).$

❷ PT $\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 x=1-2\sin x\Leftrightarrow \sin^2 x-4\sin x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \sin x=4\ (\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=k\pi\,(k\in\mathbb{Z}).$

❸ PT $\Leftrightarrow 2\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)-\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin^2 2x+\sin 2x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-2\ (\text{loại})\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}).$

❹ PT $\Leftrightarrow 1-3\sin^2 x\cos^2 x=1-2\sin^2 2x\Leftrightarrow 1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-2\sin^2 2x$

$\Leftrightarrow \sin 2x=0\Leftrightarrow 2x=k\pi\Leftrightarrow x=k\frac{\pi}{2},(k\in\mathbb{Z}).$

Bài 5. Giải các phương trình sau

❶ $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin x\cos x=0$ ❷ $\frac{2(\sin^6 x+\cos^6 x)-\sin x\cos x}{\sqrt{2}-2\sin x}=0$ (A06)

❸ $\cos^4 x=\sin^2 x-\frac{1}{4}$ ❹ $\frac{(2-\sqrt{3})\cos x-2\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}{2\cos x-1}=1$

Hướng dẫn giải:

❶ PT $\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin 2x=0\Leftrightarrow \sin^2 2x-\sin 2x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=-1\\ \sin 2x=2\ (\text{loại})\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}).$

❷ (A-2006) Điều kiện: $\sqrt{2}-2\sin x\neq 0\Leftrightarrow \sin x\neq\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\neq\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x\neq\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right.$

PT $\Leftrightarrow 2(\sin^6 x+\cos^6 x)-\sin x\cos x=0\Leftrightarrow 2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2x\right)-\frac{1}{2}\sin 2x=0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x+\sin 2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=1\\ \sin 2x=-\frac{4}{3}\ (\text{loại})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ (k\in\mathbb{Z}).$

Kết hợp nghiệm ta thu được nghiệm của phương trình $x=\frac{5\pi}{4}+k2\pi.$

❸ PT $\Leftrightarrow \cos^4 x = 1 - \cos^2 x - \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 4\cos^4 x + 4\cos^2 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 x = \dfrac{1}{2} \\ \cos^2 x = -\dfrac{3}{4} \text{ (loại)} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ (k \in \mathbb{Z}).$

❹ Điều kiện: $2\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi.$

PT $\Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})\cos x - 2\sin^2(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}) = 2\cos x - 1 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\cos x - \left(1 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right) = -1$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

Bài 6. Giải các phương trình sau

❶ $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ (D-2013) ❷ $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ (B-2013)

❸ $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$ (A-2014) ❹ $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$ (D-2006)

Hướng dẫn giải:

❶ PT $\Leftrightarrow \sin 3x - \sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos 2x \sin x + \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \sin x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. .$

❷ PT $\Leftrightarrow \sin 5x + 1 + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = -\sin 5x \Leftrightarrow \cos 2x = \sin\left(-5x\right)$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 5x\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \dfrac{\pi}{2} + 5x + k2\pi \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} - 5x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} - k\dfrac{2\pi}{3} \\ x = -\dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{2\pi}{7} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

❸ PT $\Leftrightarrow \sin x + 4\cos x = 2 + 2\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x(1 - 2\cos x) + 2(2\cos x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x - 2)(1 - 2\cos x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 2 \text{ (loại)} \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi.$

❹ PT $\Leftrightarrow \cos 3x - \cos x + \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow -2\sin 2x \sin x - 2\sin^2 x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(\sin 2x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin 2x + \sin x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ 2\cos x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

MỘT SỐ DẠNG PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

DẠNG 1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT VỚI SINX VÀ COSX

✍ **Dạng phương trình:** $\boxed{a\sin x + b\cos x = c}$

✍ **Cách giải:** Chia hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$

$$\to \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

C1: Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha$. Khi đó PT $\Leftrightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \to x = ?$

C2: Đặt $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\beta, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\beta$. Khi đó PT $\Leftrightarrow \cos(x-\beta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \to x = ?$

✍ Điều kiện có nghiệm của phương trình: $a^2+b^2 \ge c^2$

✍ Chú ý: Khi phương trình có $|a| = |c|$ hoặc $|b| = |c|$ thì dùng công thức góc nhân đôi và sử dụng phép nhóm nhân tử chung.

Bài 1. Giải các phương trình sau

❶ $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$

❷ $2\sin x + 2\cos x = \sqrt{6}$

❸ $\sqrt{3}\cos 3x - \sin 3x = \sqrt{2}$

❹ $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin 5x$

Hướng dẫn giải:

❶ Nhận xét: *Trong PT này ta xác định các hệ số* $a = 1, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{2}$ *thỏa mãn điều kiện* $a^2+b^2 \ge c^2$ *do đó phương trình này có nghiệm. Để giải PT ta cần chia cả hai vế cho* $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2} = 2$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$$

❷ $$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$$

❸ $$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 3x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} - 3x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - 3x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{36} - k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{5\pi}{36} - k\frac{2\pi}{3}. \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

❹ $$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \sin 5x \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \sin 5x$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5x = x + \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 5x = \frac{3\pi}{4} - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} \end{array}\right. .$$

Bài 2. Giải các phương trình sau

❶ $\sqrt{3}\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) = 1$ ❷ $(\sqrt{3} - 1)\sin x - (\sqrt{3} + 1)\cos x + \sqrt{3} - 1 = 0$

❸ $3\sin x - \sqrt{3}\cos 3x = 1 + 4\sin^3 x$ ❹ $\cos 7x - \sqrt{3}\sin 7x + \sqrt{2} = 0, x \in \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7}\right)$

Hướng dẫn giải:

❶ PT $\Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❷ PT $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{8}}\sin x - \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{8}}\cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{8}}$

Nhận xét: *Sử dụng máy tính 570ES PLUS ta bấm SHIFT SIN của* $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{8}}$ *thu được* $\frac{5\pi}{12}$, *tức là* $\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{8}}$. *Vậy ta có nên đưa phương trình về dạng* $\cos\frac{5\pi}{12}\sin x - \sin\frac{5\pi}{12}\cos x = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{8}}$ *ngay lập tức hay chưa? Câu trả lời là chưa. Bởi vì kết quả* $\frac{5\pi}{12}$ *không phải giá trị cung lượng giác đặc biệt có mặt trong SGK? Vì vậy ta nên làm như sau cho thuyết phục:*

Ta có $\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{8}}$.

Nên PT $\Leftrightarrow \cos\frac{5\pi}{12}\sin x - \sin\frac{5\pi}{12}\cos x = -\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{8}} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = -\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{5\pi}{12} = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \\ x + \frac{5\pi}{12} = \frac{13\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

❸ PT $\Leftrightarrow \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{array}\right. .$$

❹ PT $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x - \frac{1}{2}\cos 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(7x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 7x - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = \frac{5\pi}{12} + k2\pi \\ 7x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{5\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \\ x = \frac{11\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$

Nhận xét: *Để tìm nghiệm* $x \in \left(\frac{2\pi}{5}; \frac{6\pi}{7}\right)$ *thực chất là ta phải chọn số nguyên* k *thỏa mãn*

$\frac{2\pi}{5} < \frac{5\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7}$ *hoặc* $\frac{2\pi}{5} < \frac{11\pi}{84} + k\frac{2\pi}{7} < \frac{6\pi}{7}$ *tức là ta phải giải các bất phương trình* $\frac{2}{5} < \frac{5}{84} + \frac{2k}{7} < \frac{6}{7}$; $\frac{2}{5} < \frac{11}{84} + \frac{2k}{7} < \frac{6}{7}$ *để tìm các miền giá trị của* k *rồi sau đó chọn* k *là số nguyên.*

KL: Vậy phương trình có các nghiệm thỏa mãn điều kiện là: $x = \frac{53\pi}{84}$, $x = \frac{5\pi}{12}$ *và* $x = \frac{59\pi}{84}$.

Ngoài ra, ta có thể không cần giải các BPT nghiệm nguyên ở trên bằng cách sử dụng 570ES PLUS như sau:

- Trước tiên ta tìm khoảng gần đúng của $\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{7}\right)$ *là* $\left(0,4; 0,857...\right)$

- Nhập biểu thức thứ nhất $\frac{5}{84} + \frac{2X}{7}$ *vào máy tính (vì máy tính không có* k *nên ta coi* X *là* k*) rồi CALC với các giá trị* $X = 0; \pm1; \pm2; \pm3...$ *để kiểm tra xem có thỏa mãn hay không. Khi đó ta tìm được* $k = 2$*, ứng với nghiệm là* $x = \frac{53\pi}{84}$.

- Tương tự cho biểu thức thứ 2 thu được $k = 1; k = 2$*, tương ứng với nghiệm* $x = \frac{5\pi}{12}$ *và* $x = \frac{59\pi}{84}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau

❶ $\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x)$

❷ $\tan x - 3\cot x = 4(\sin x + \sqrt{3}\cos x)$

❸ $\frac{\sqrt{3}(1 - \cos 2x)}{2\sin x} = \cos x$

❹ $\frac{\sin x - \sin 2x}{\cos x - \cos 2x} = \sqrt{3}$ (CĐ2004)

Hướng dẫn giải:

❶ Nhận xét: *Đối với PT dạng* $a\sin x + b\cos x = c$ *thì chúng ta có thể giải một cách dễ dàng bằng cách chia cho* $\sqrt{a^2 + b^2}$. *Nhưng nếu gặp dạng* $\boxed{a\sin mx + b\cos mx = c\sin nx + d\cos nx}$ *trong đó* $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ *thì làm thế nào? Cứ bình tĩnh quan sát nhé! Chúng ta nhận thấy mỗi vế của phương trình đều có dạng bậc nhất của sin và cos, ta thử chia mỗi vế cho* $\sqrt{a^2 + b^2}$, *rất may* $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{c^2 + d^2}$. *Nhưng lưu ý rằng, ta phải chuyển vế sao cho mỗi vế có cùng một cung. Từ đó ta có lời giải như sau:*

PT $\Leftrightarrow \cos 7x + \sqrt{3}\sin 7x = \sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 7x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x = \frac{1}{2}\sin 5x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(7x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(5x+\frac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}7x+\frac{\pi}{6}=5x+\frac{\pi}{3}+k2\pi\\7x+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}-5x+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k\pi\\x=\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{6}\end{array}\right.$$

❷ Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$.

$$\text{PT}\Leftrightarrow\frac{\sin^2x-3\cos^2x}{\sin x\cos x}=4(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\Leftrightarrow(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\left(\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{\sin x\cos x}-4\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\sqrt{3}\cos x=0\\ \sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin 2x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-\sqrt{3}\\ \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x\end{array}\right.$$

Giải và kết hợp nghiệm trên đường tròn lượng giác ta thu được: $x=-\frac{\pi}{3}+k\pi; x=\frac{\pi}{3}-k2\pi;$

$x=\frac{2\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}, (k\in\mathbb{Z})$.

❸ Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\pi$

$$\text{PT}\Leftrightarrow\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\2x+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\ \text{(loại)}\\x=\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$. Vậy phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

❹ Điều kiện: $\cos x-\cos 2x\neq 0\Leftrightarrow 2x\neq\pm x+k2\pi\Leftrightarrow x\neq k\frac{2\pi}{3}$

$$\text{PT}\Leftrightarrow\sin x-\sin 2x=\sqrt{3}(\cos x-\cos 2x)\Leftrightarrow\sin x-\sqrt{3}\cos x=\sin 2x-\sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-k2\pi\\x=\frac{5\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-k2\pi; x=\frac{5\pi}{9}+k\frac{2\pi}{3}$.

Bài 4. Giải các phương trình sau

❶ $\cos x+\sqrt{3}\sin x=\frac{1}{\cos x}$

❷ $1+\tan x=2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ (A2013)

❸ $\sqrt{3}\cos 5x-2\sin 3x\cos 2x-\sin x=0$ (D09)

❹ $4\sin x+3\cos x+\frac{6}{4\sin x+3\cos x+1}=6$

Hướng dẫn giải:

❶ Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

PT $\Leftrightarrow \cos^2 x + \sqrt{3}\sin x\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x + \sqrt{3}\sin 2x = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \text{ (t/m)} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \text{ (t/m)} \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = k\pi; x = \frac{\pi}{3} + k\pi$.

❷ Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2(\sin x + \cos x) \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)\left(\frac{1}{\cos x} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện thu được nghiệm của PT: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$, $(k \in \mathbb{Z})$.

❸ PT $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - (\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x = 2\sin x$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{\pi}{3} - 5x = x + k2\pi \\ \frac{\pi}{3} - 5x = \pi - x + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{18} - k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} - k\frac{\pi}{4} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -\frac{\pi}{18} - k\frac{\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{6} - k\frac{\pi}{4}$.

❹ Đặt $t = 4\sin x + 3\cos x + 1$, $(t \neq 0)$

$$\text{PT} \Leftrightarrow t - 1 + \frac{6}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 6 \end{array}\right.$$

+ Với $t = 1$ ta có $4\sin x + 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$.

+ Với $t = 6$ ta có $4\sin x + 3\cos x = 5 \Leftrightarrow \frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 1$

$\Leftrightarrow \cos\alpha\sin x + \sin\alpha\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin(x - \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \alpha + k2\pi; x = \alpha + \frac{\pi}{2} + k2\pi$ trong đó $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\cos\alpha = \frac{4}{5}$.

DẠNG 2. PHƯƠNG TRÌNH THUẦN BẬC HAI VỚI SINX VÀ COSX

✍ **Dạng phương trình:** $a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c.\cos^2 x + d = 0$

✍ **Cách giải:**

Cách 1: + Xét $\cos x = 0$ có là nghiệm phương trình không?

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$a\tan^2 x + b\tan x + c + d(1+\tan^2 x) = 0 \Rightarrow \tan x \Rightarrow x$$

Cách 2: Dùng công thức hạ bậc đưa về phương trình bậc nhất với $\sin 2x$ và $\cos 2x$ (dạng 1).

Bài 1. Giải các phương trình sau

❶ $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$ ❷ $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$

❸ $\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$ ❹ $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$

Hướng dẫn giải:

❶ $2\sin^2 x + \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$): Khi đó PT trở thành $2 = 0$ nên $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2\tan^2 x + \tan x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = -\dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan\left(-\dfrac{3}{2}\right) + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Cách 2: PT $\Leftrightarrow 2(1-\cos 2x) + \sin 2x - 3(1+\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x - 5\cos 2x = 1$

Đặt $t = \tan x$ khi đó $\sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}; \cos 2x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$. Phương trình trở thành

$$2t^2 + t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = 1\\ t = -\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

❷ $2\sin^2 x - 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$): Khi đó PT trở thành $2 = 0$ nên $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❸ $\sin^2 x - 10\sin x\cos x + 21\cos^2 x = 0$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$): Khi đó phương trình trở thành $1 = 0$ nên $\cos x = 0$ không t/m.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\tan^2 x - 10\tan x + 21 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 3\\ \tan x = 7\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \arctan 3 + k\pi\\ x = \arctan 7 + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❹ $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 3\cos^2 x = 0$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$): Khi đó phương trình trở thành $2 = 0$ nên $\cos x = 0$ không t/m.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$2\tan^2 x - 5\tan x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = \dfrac{3}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan\left(\dfrac{3}{2}\right) + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 2. Giải các phương trình sau

❶ $\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$ ❷ $3\sin^2 x + 4\sin 2x + 4\cos^2 x = 0$

❸ $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$ ❹ $3\sin^2 x + 4\sin 2x - (8\sqrt{3}-3)\cos^2 x = 3$

Hướng dẫn giải:

❶ $\sin^2 x + (1-\sqrt{3})\sin x\cos x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$): Khi đó phương trình trở thành $1 = 0$ nên $\cos x = 0$ không t/m.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$\tan^2 x + (1-\sqrt{3})\tan x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \tan x = \sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❷ PT $\Leftrightarrow 3\sin^2 x + 8\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$): Khi đó phương trình trở thành $3 = 0$ nên $\cos x = 0$ không t/m.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$3\tan^2 x + 8\tan x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -2\\ \tan x = -\dfrac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \arctan(-2) + k\pi\\ x = \arctan\left(-\dfrac{2}{3}\right) + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❸ $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 2$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$): Khi đó phương trình trở thành $3 = 2$ nên $\cos x = 0$ không t/m.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$3\tan^2 x - 4\tan x + 5 = 2(1+\tan^2 x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = 1\\ \tan x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \arctan 3 + k\pi\end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

❹ PT $\Leftrightarrow 3\sin^2 x + 8\sin x\cos x - (8\sqrt{3}-3)\cos^2 x = 3$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin^2 x = 1$): Khi đó phương trình trở thành $3 = 3$ nên $\cos x = 0$ thỏa mãn.

Tức là $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ là nghiệm của phương trình.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^2 x$ ta được:

$$3\tan^2 x + 8\tan x - \left(8\sqrt{3}-3\right) = 3(1+\tan^2 x) \Leftrightarrow \tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

DẠNG 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC BA VỚI SINX VÀ COSX

✍ **Dạng phương trình:**

$$a\sin^3 x + b\cos^3 x + c\sin^2 x\cos x + d\cos^2 x\sin x + e\sin x + f\cos x = 0$$

✍ **Cách giải:**

+ Xét $\cos x = 0$ có là nghiệm phương trình không?

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ với chú ý: $\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Bài 1. **Giải các phương trình sau**

❶ $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$ ❷ $2\sin^3 x = \cos x$

❸ $2\cos^3 x = \sin 3x$ ❹ $4\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x = 0$

Hướng dẫn giải:

❶ $\sin x - 4\sin^3 x + \cos x = 0$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin x = \pm 1$): Khi đó PT trở thành $\mp 3 = 0$ nên $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$\tan x(1+\tan^2 x) - 4\tan^3 x + (1+\tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow 3\tan^3 x - \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(3\tan^2 x + 2\tan x + 1) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Nhận xét: *Khi giải phương trình bậc 3 các em thường bấm máy tính để ra nghiệm ngay, nên các em biến đổi phương trình $3t^3 - t^2 - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Như thế liệu đã đầy đủ chưa? Câu trả lời là chưa đủ vì chúng ta không hề học công thức nghiệm phương trình bậc 3. Các em cần phải phân tích thành nhân tử trước khi đưa ra nghiệm. Vậy làm thế nào để phân tích nhanh nhất?*

Bước 1: Dùng máy tính 570ES PLUS thu được nghiệm như sau $t = 1,\ t = -\dfrac{1}{3} \pm 0,47i$ (1 nghiệm thực và 2 nghiệm phức). Chú ý đến số $-\dfrac{1}{3}$ nhé!

Bước 2: Viết nhân tử: do PT có nghiệm $t = 1$ nên có một nhân tử $(t-1)$, vậy nhân tử còn lại là gì? Dựa vào hệ số đầu tiên và cuối cùng trong phương trình bậc 3 ta thu được hệ số đầu tiên và cuối cùng của nhân tử còn lại, tức là có nhân tử nữa $(3t^2 + Bt + 1)$. Để tìm B ta dựa vào phần thực của nghiệm phức còn lại $-\dfrac{1}{3} = -\dfrac{B}{2A}$ từ đó suy ra $B = 2$. Vậy ta lập tức phân tích phương trình thành $(t-1)(3t^2 + 2t + 1) \Leftrightarrow t = 1$.

❷ $2\sin^3 x = \cos x$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin x = \pm 1$): Khi đó PT trở thành $\pm 2 = 0$ nên $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$2\tan^3 x = 1 + \tan^2 x \Leftrightarrow 2\tan^3 x - \tan^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(2\tan^2 x + \tan x + 1) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

❸ $2\cos^3 x = \sin 3x \Leftrightarrow 2\cos^3 x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin x = \pm 1$): Khi đó PT trở thành $0 = \pm 1$ nên $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$2 = 3\tan x(1+\tan^2 x) - 4\tan^3 x \Leftrightarrow \tan^3 x - 3\tan x + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)^2(\tan x + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \tan x = 1 \\ \tan x = -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \arctan(-2) + k\pi. \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Nhận xét: *Khi bấm máy tính giải phương trình $t^3 - 3t + 2 = 0$, chúng ta thu được 2 nghiệm $t = 1, t = -2$. Khi đó phân tích phương trình thành $t^3 - 3t + 2 = (t-1)(t+2)$. Như thế liệu đầy đủ chưa? Các em hãy để ý bậc ở hai vế để tự đưa ra câu trả lời nhé. Như vậy là đa thức này còn có 1 nhân tử nữa, theo các em nhân tử này là $t-1$ hay $t+2$. Câu trả lời là $t-1$, vì sao lại như vậy? Rất dễ dàng thôi nhân tử thứ ba này là $t+2$ thì số hạng tự do của đa thức ban đầu phải là -4, không ổn rồi. Vậy kết quả là $t^3 - 3t + 2 = (t-1)(t+2)(t-1) = (t-1)^2(t+2)$.*

❹ $4\cos^3 x + 2\sin^3 x - 3\sin x = 0$

+ Xét $\cos x = 0$ (tức $\sin x = \pm 1$): Khi đó PT trở thành $\pm 1 = 0$ nên $\cos x = 0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$4 + 2\tan^3 x - 3\tan x(1+\tan^2 x) = 0 \Leftrightarrow \tan^3 x + 3\tan x - 4 = 0$

$\Leftrightarrow (\tan x-1)(\tan^2 x+\tan x+4)=0 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 2. Giải các phương trình sau

❶ $\sin x\sin 2x+\sin 3x=6\cos^3 x$ ❷ $\cos^3 x-\sin^3 x=\sin x+\cos x$

❸ $6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x$ ❹ $\cos^3 x+\sin x-3\sin^2 x\cos x=0$

Hướng dẫn giải:

❶ $\sin x\sin 2x+\sin 3x=6\cos^3 x \Leftrightarrow 2\sin^2 x\cos x+3\sin x-4\sin^3 x=6\cos^3 x$

+ Xét $\cos x=0$ (tức $\sin x=\pm 1$): Khi đó PT trở thành $\pm 1=0$ nên $\cos x=0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$2\tan^2 x+3\tan x(1+\tan^2 x)-4\tan^3 x=6 \Leftrightarrow \tan^3 x-2\tan^2 x-3\tan x+6=0$

$$\Leftrightarrow (\tan x-2)(\tan^2 x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\frac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z}).$$

❷ PT $\Leftrightarrow \cos^3 x-\sin^3 x-\sin x-\cos x=0$

+ Xét $\cos x=0$ (tức $\sin x=\pm 1$): Khi đó PT trở thành $\pm 2=0$ nên $\cos x=0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$1-\tan^3 x-(\tan x+1)(1+\tan^2 x)=0 \Leftrightarrow 1-\tan^3 x-(\tan^3 x+\tan^2 x+\tan x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \tan^2 x+\tan x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=0\\ \tan x=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right. \ (k\in\mathbb{Z}).$$

❸ $6\sin x-2\cos^3 x=5\sin 2x\cos x \Leftrightarrow 6\sin x-2\cos^3 x=10\sin x\cos^2 x$

+ Xét $\cos x=0$ (tức $\sin x=\pm 1$): Khi đó PT trở thành $\pm 6=0$ nên $\cos x=0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$6\tan x(1+\tan^2 x)-2=10\tan x \Leftrightarrow 6\tan^3 x-4\tan x-2=0$

$\Leftrightarrow (\tan x-1)(6\tan^2 x+6\tan x+2)=0 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

❹ $\cos^3 x+\sin x-3\sin^2 x\cos x=0$

+ Xét $\cos x=0$ (tức $\sin x=\pm 1$): Khi đó PT trở thành $\pm 1=0$ nên $\cos x=0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$1+\tan x(1+\tan^2 x)-3\tan^2 x=0 \Leftrightarrow 2\tan^3 x-\tan x-1=0$

$\Leftrightarrow (\tan x-1)(2\tan^2 x+2\tan x+1)=0 \Leftrightarrow \tan x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 3. Giải các phương trình sau

❶ $\cos^3 x-4\sin^3 x-3\cos x\sin^2 x+\sin x=0$ ❷ $1+3\tan x=2\sin 2x$

❸ $2\sin x+2\sqrt{3}\cos x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}$ ❹ $\tan x\sin^2 x-2\sin^2 x=3(\cos 2x+\sin x\cos x)$

Hướng dẫn giải:

❶ $\cos^3 x-4\sin^3 x-3\cos x\sin^2 x+\sin x=0$

+ Xét $\cos x=0$ (tức $\sin x=\pm 1$): Khi đó PT trở thành $\pm 1=0$ nên $\cos x=0$ không thỏa mãn.

+ Xét $\cos x\neq 0$, chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$1-4\tan^3 x-3\tan^2 x+\tan x(1+\tan^2 x)=0 \Leftrightarrow 3\tan^3 x+3\tan^2 x-\tan x-1=0$

$$\Leftrightarrow (\tan x+1)(3\tan^2 x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \tan x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

❷ Điều kiện: $\cos x\neq 0$. Khi đó phương trình trở thành: $\cos x+3\sin x=4\sin x\cos^2 x$

Chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$(1+3\tan x)(1+\tan^2 x)=4\tan x \Leftrightarrow 3\tan^3 x+\tan^2 x-\tan x+1=0$

$\Leftrightarrow (\tan x+1)(3\tan^2 x-2\tan x+1)=0 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{\pi}{4}$ (t/m), $(k\in\mathbb{Z})$.

❸ Điều kiện: $\cos x\neq 0$. PT trở thành: $2\sin^2 x\cos x+2\sqrt{3}\cos^2 x\sin x=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

Chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$2\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x=(\sqrt{3}\tan x+1)(\tan^2 x+1) \Leftrightarrow \sqrt{3}\tan^3 x-\tan^2 x-\sqrt{3}\tan x+1=0$

$$\Leftrightarrow (\tan^2 x-1)(\sqrt{3}\tan x-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=-1\\ \tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right. \text{(t/m)}, (k\in\mathbb{Z}).$$

❹ Điều kiện: $\cos x\neq 0$. PT trở thành: $\sin^3 x-2\sin^2 x\cos x=3(2\cos^3 x+\sin x\cos^2 x-\cos x)$

Chia hai vế phương trình cho $\cos^3 x$ ta được:

$\tan^3 x-2\tan^2 x=3(2+\tan x-1-\tan^2 x) \Leftrightarrow \tan^3 x+\tan^2 x-3\tan x-3=0$

$$\Leftrightarrow (\tan x+1)(\tan^2 x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ \tan x=\sqrt{3}\\ \tan x=-\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi\\ x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right. \quad \text{(t/m)}, (k\in\mathbb{Z}).$$

Bài 4. Giải các phương trình sau

❶ $\cos^3 x-\sin^3 x=\cos^2 x-\sin^2 x$

❷ $\cos^3 x+\sin^3 x=\cos 2x$

❸ $\cos^6 x-\sin^6 x=\dfrac{13}{8}\cos^2 2x$

❹ $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{7}{8}\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$

Hướng dẫn giải:

❶ PT $\Leftrightarrow \cos^3 x-\sin^3 x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x-\cos x-\sin x)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\sin x \quad (1)\\ 1+\sin x\cos x-\sin x-\cos x=0 \ (2)\end{array}\right.$$

Giải (1): $\cos x=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}-x+k2\pi \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

Giải (2): Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$. Khi đó (2) $\Leftrightarrow 2 + (t^2-1) - 2t = 0$

$$\Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

❷ PT $\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x\cos x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\cos x + \sin x)(1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x) = 0$

✦ $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

✦ $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$

Đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{1-t^2}{2}$ ta có: $2 + t^2 - 1 + 2t = 0 \Leftrightarrow t = -1$

$$\Leftrightarrow \sin x - \cos x = -1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = k2\pi; x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

❸ PT $\Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x) = \frac{13}{8}\cos^2 2x$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(1 - \sin^2 x\cos^2 x) = \frac{13}{8}\cos^2 2x \Leftrightarrow \cos 2x\left(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x - \frac{13}{8}\cos 2x\right) = 0$$

✦ $\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$

✦ $8 - 2\sin^2 2x - 13\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 13\cos 2x + 6 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2}, \cos 2x = 6$ (loại) $\Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$.

❹ Điều kiện: $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \neq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{7}{8} \Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = \pm\frac{1}{2}$$

Vậy phương trình có nghiệm:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi; x = -\frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z}).$$

DẠNG 4. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI SINX VÀ COSX

✍ **Dạng phương trình:**

$$f(\sin x \pm \cos x, \sin x \cos x) = 0$$

✍ **Cách giải:**

+ Đặt $t = \sin x + \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

+ Đặt $t = \sin x - \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{1 - t^2}{2}$. Đưa về phương trình ẩn t.

Chú ý: Nếu $t = \sin x \pm \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x \pm \dfrac{\pi}{4}\right)$ thì $-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}$.

Bài 1. Giải các phương trình sau

❶ $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0$

❷ $\sin x \cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$

❸ $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = 1$

❹ $\tan x - 2\sqrt{2}\sin x = 1$

Hướng dẫn giải:

❶ $2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x) + 2\sin x \cos x + 1 = 0$

Đặt $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2}$ $\left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)$

Phương trình trở thành: $2t + (t^2 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 2t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = -2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Khi đó $\sin x + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

Vậy phương trình có nghiệm:

❷ $\sin x \cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{1 - t^2}{2}$ $\left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)$

Phương trình trở thành: $1 - t^2 = 12(t - 1) \Leftrightarrow t^2 + 12t - 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \text{ (t/m)} \\ t = -13 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

Vì vậy $\sin x - \cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi; x = \pi + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

❸ $\sin 2x + \sqrt{2}\sin(x - \dfrac{\pi}{4}) = 1 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x + \sin x - \cos x = 1$

Đặt $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{1 - t^2}{2}$ $\left(-\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}\right)$

Phương trình trở thành: $1 - t^2 + t = 1 \Leftrightarrow t^2 - t = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \text{ (t/m)} \\ t = 1 \text{ (t/m)} \end{array}\right.$

✧ $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

✧ $\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❹ $\tan x-2\sqrt{2}\sin x=1\Leftrightarrow \sin x-\cos x-2\sqrt{2}\sin x\cos x=0\ (\cos x\neq 0)$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}\quad \left(-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $t-\sqrt{2}(1-t^2)=0\Leftrightarrow \sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \text{(t/m)} \\ t=-\sqrt{2}\ \text{(t/m)} \end{array}\right.$

✧ $\sin x-\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi \\ x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi \end{array}\right.$

✧ $\sin x-\cos x=-\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi$

Kết hợp với điều kiện, PT có nghiệm: $x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi; x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi; x=-\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 2. Giải các phương trình sau

❶ $1+\tan x=2\sin x+\frac{1}{\cos x}$

❷ $\sin x+\cos x=\frac{2}{\tan x}-\frac{2}{\cot x}$

❸ $\sin x+\frac{1}{\sin x}+\cos x+\frac{1}{\cos x}=\frac{10}{3}$

❹ $2\sin x+\cot x=2\sin 2x+1$

Hướng dẫn giải:

❶ $1+\tan x=2\sin x+\frac{1}{\cos x}\Leftrightarrow \cos x+\sin x=2\sin x\cos x+1,\ \left(\cos x\neq 0\right)$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\quad \left(-\sqrt{2}\leq t\leq\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $t=(t^2-1)+1\Leftrightarrow t^2-t\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ \text{(t/m)} \\ t=0\ \text{(t/m)} \end{array}\right.$

✧ $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

✧ $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi; x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❷ Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$. Khi đó:

PT $\Leftrightarrow \sin x+\cos x=2\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(\sin x\cos x+2\sin x-2\cos x)=0$

✧ $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ (t/m)

✧ $\sin x\cos x+2\sin x-2\cos x=0$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}\quad\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $(1-t^2)+4t=0\Leftrightarrow t^2-4t-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2+\sqrt{5}\ \text{(loại)}\\ t=2-\sqrt{5}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❸ Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$.

PT $\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}=\frac{10}{3}$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\quad\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $3t^3-10t^2+3t+10=0\Leftrightarrow(t-2)(3t^2-4t-5)=0\Leftrightarrow t=\frac{2-\sqrt{19}}{3}$

Khi đó $\sin x+\cos x=\frac{2-\sqrt{19}}{3}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2-\sqrt{19}}{3\sqrt{2}}=\sin\alpha$

Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm là: $x=-\frac{\pi}{4}+\alpha+k2\pi; x=\frac{3\pi}{4}-\alpha+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❹ Điều kiện: $\sin x\neq 0$

PT $\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\cos x=4\sin^2 x\cos x+\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x-1)=\cos x(4\sin^2 x-1)$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)\left[\cos x(2\sin x+1)-\sin x\right]=0$

✧ $\sin x=\frac{1}{2}\ \text{(t/m)}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$

✧ $2\sin x\cos x-(\sin x-\cos x)=0$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}\quad\left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $(1-t^2)-t=0 \Leftrightarrow t^2+t-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{(t/m)} \\ t=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{(loại)} \end{array}\right.$

Khi đó $\sin x-\cos x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}=\sin\alpha$

Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi; x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$; $x=\dfrac{\pi}{4}+\alpha+k2\pi$;

$x=\dfrac{5\pi}{4}-\alpha+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 3. Giải các phương trình sau

❶ $\sin^3 x+\cos^3 x=2\sin x\cos x+\sin x+\cos x$ ❷ $1-\sin^3 x+\cos^3 x=\sin 2x$

❸ $\sqrt{2}\left(\sin x+\cos x\right)=\tan x+\cot x$ ❹ $(1+\sin x)(1+\cos x)=2$

Hướng dẫn giải:

❶ PT $\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=2\sin x\cos x+\sin x+\cos x$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $t(2-t^2+1)=2(t^2-1)+2t \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(t+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (t/m)} \\ t=-1 \text{ (t/m)} \\ t=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

✧ $\sin x+\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$

✧ $\sin x+\cos x=-1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.$

Kết hợp nghiệm ta thu được: $x=k\pi; x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Chú ý: *Ở đây hai họ nghiệm $x=k2\pi$ và $x=\pi+k2\pi$ được gộp thành họ nghiệm $x=k\pi$. Còn hai họ nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ và $x=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$ được gộp thành họ nghiệm $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$.*

❷ PT $\Leftrightarrow 1-(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)=2\sin x\cos x$

Đặt $t=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\sin x\cos x=\dfrac{-t^2+1}{2}\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $2-t(2+1-t^2)=2(1-t^2) \Leftrightarrow t(t-1)(t+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \text{ (t/m)} \\ t=0 \text{ (t/m)} \\ t=-3 \text{ (loại)} \end{array}\right.$

✧ $\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ x=\pi+k2\pi \end{array}\right.$

✧ $\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi; x=\pi+k2\pi; x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❸ Điều kiện: $\begin{cases}\sin x\neq 0\\ \cos x\neq 0\end{cases}$. Phương trình $\Leftrightarrow \sqrt{2}(\sin x+\cos x)=\frac{1}{\sin x\cos x}$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $\sqrt{2}t=\frac{2}{t^2-1}\Leftrightarrow \sqrt{2}t^3-\sqrt{2}t-2=0\Leftrightarrow (\sqrt{2}t-2)(t^2+\sqrt{2}t+1)=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$

Khi đó $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$

Kết hợp điều kiện, phương trình có nghiệm là: $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❹ $(1+\sin x)(1+\cos x)=2\Leftrightarrow \sin x\cos x+\sin x+\cos x=1$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $t^2-1+2t=2\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ \text{(t/m)} \\ t=-3\ \text{(loại)} \end{array}\right.$

Khi đó $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=k2\pi; x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

Bài 4. Giải các phương trình sau

❶ $\sin x\cos x+\left|\sin x+\cos x\right|=1$

❷ $(1+\sin^2 x)\cos x+(1+\cos^2 x)\sin x=1+\sin 2x$

❸ $\sqrt{2}\sin 2x(\sin x+\cos x)=2$

❹ $\left|\sin x-\cos x\right|+4\sin 2x=1$

❺ $2\sin 2x-3\sqrt{6}\left|\sin x+\cos x\right|+8=0$

Hướng dẫn giải:

❶ $\sin x\cos x+\left|\sin x+\cos x\right|=1$

Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\ \left(0\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $t^2-1+2t=2\Leftrightarrow t^2+2t-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1\ \text{(t/m)} \\ t=-3\ \text{(loại)} \end{array}\right.$

✧ $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

✧ $\sin x+\cos x=-1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$

Kết hợp nghiệm ta thu được: $x=k\pi;x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❷ PT $\Leftrightarrow \sin x+\cos x+\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=1+2\sin x\cos x$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $2t+(t^2-1)t=2+2(t^2-1)\Leftrightarrow t^3-2t^2+t=0\Leftrightarrow t(t-1)^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=1\end{array}\right.$

✧ $\sin x+\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

✧ $\sin x+\cos x=0\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=k2\pi;x=\frac{\pi}{2}+k2\pi;x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❸ PT $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin x\cos x(\sin x+\cos x)=2$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\ \left(-\sqrt{2}\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $\sqrt{2}\left(t^2-1\right)t=2\Leftrightarrow\sqrt{2}t^3-\sqrt{2}t-2=0\Leftrightarrow(\sqrt{2}t-2)(t^2+\sqrt{2}t+1)=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}$

Khi đó $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❹ PT $\Leftrightarrow \left|\sin x-\cos x\right|+8\sin x\cos x=1$

Đặt $t=\left|\sin x-\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right|\Rightarrow \sin x\cos x=\frac{1-t^2}{2}\ \left(0\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $t+4(1-t^2)=1\Leftrightarrow 4t^2-t-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\ \text{(t/m)}\\t=-\frac{3}{4}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$

✧ $\sin x-\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+k2\pi\\x=\pi+k2\pi\end{array}\right.$

✧ $\sin x-\cos x=-1\Leftrightarrow\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k2\pi\\x=\frac{3\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.$

Kết hợp nghiệm ta thu được: $x=k\pi;x=\frac{\pi}{2}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❺ PT $\Leftrightarrow 4\sin x\cos x-3\sqrt{6}\left|\sin x+\cos x\right|+8=0$

Đặt $t=\left|\sin x+\cos x\right|=\sqrt{2}\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|\Rightarrow\sin x\cos x=\frac{t^2-1}{2}\quad\left(0\le t\le\sqrt{2}\right)$

PT trở thành: $2(t^2-1)-3\sqrt{6}t+8=0\Leftrightarrow 2t^2-3\sqrt{6}t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\sqrt{6}}{2}\ \text{(t/m)}\\t=\sqrt{6}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$

✧ $\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{12}+k2\pi\\x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.$

✧ $\sin x+\cos x=-\frac{\sqrt{6}}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{7\pi}{12}+k2\pi\\x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi\end{array}\right.$

Vậy PT có nghiệm: $x=\frac{\pi}{12}+k2\pi;x=\frac{5\pi}{12}+k2\pi;x=-\frac{7\pi}{12}+k2\pi;x=\frac{13\pi}{12}+k2\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

DẠNG 5. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG THUẬN NGHỊCH

✍ **Dạng phương trình:**

$$A\left(f^2(x)+\frac{k^2}{f^2(x)}\right)+B\left(f(x)+\frac{k}{f(x)}\right)+C=0,\ \text{với}\ f(x)=\sin x,\cos x\ \ (1)$$

$$\text{hoặc}\ A\left(a^2\tan^2x+b^2\cot^2x\right)+B\left(a\tan x+b\cot x\right)+C=0\ \ (2)$$

✍ **Cách giải:** ✧ Đối với phương trình (1): Đặt $t=f(x)+\frac{k}{f(x)}$

✧ Đối với phương trình (2): Đặt $t=a\tan x+b\cot x$

Bài 1. Giải các phương trình sau

❶ $4\left(\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}\right)+4\left(\sin x+\frac{1}{\sin x}\right)-7=0$

❷ $\frac{2}{\sin^2x}+2\tan^2x+5(\tan x+\cot x)+4=0$

❸ $\frac{3}{\cos^2x}+3\cot^2x+4(\tan x+\cot x)-1=0$

Hướng dẫn giải:

❶ Điều kiện: $\sin x\ne 0$.

Đặt $t=\sin x+\frac{1}{\sin x}\Rightarrow t^2=\sin^2x+\frac{1}{\sin^2x}+2$

PT trở thành: $4(t^2-2)+4t-7=0 \Leftrightarrow 4t^2+4t-15=0 \Leftrightarrow \left[t=\frac{3}{2}; t=-\frac{5}{2} \right.$

✧ $\sin x+\frac{1}{\sin x}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 x-3\sin x+2=0$ (vô nghiệm)

✧ $\sin x+\frac{1}{\sin x}=-\frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\sin^2 x+5\sin x+2=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=-\frac{1}{2} \text{ (t/m)} \\ \sin x=-2 \text{ (loại)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi; x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Nhận xét: *Dùng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương nghịch đảo, ta có thể đánh giá t như sau:*

$|t|=\left|\sin x+\frac{1}{\sin x}\right|=|\sin x|+\frac{1}{|\sin x|}\geq 2\sqrt{|\sin x|.\frac{1}{|\sin x|}}=2$ *để đưa ra điều kiện* $|t|\geq 2$.

❷ Điều kiện: $\begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases}$. PT $\Leftrightarrow 2(\cot^2 x+\tan^2 x)+5(\tan x+\cot x)+6=0$

Đặt $t=\tan x+\cot x \Rightarrow t^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2 \Rightarrow \tan^2 x+\cot^2 x=t^2-2$

PT trở thành: $2(t^2-2)+5t+6=0 \Leftrightarrow 2t^2+5t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2} \\ t=-2 \end{array}\right.$

✧ $\tan x+\cot x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\tan^2 x+\tan x+2=0$ (vô nghiệm)

✧ $\tan x+\cot x=-2 \Leftrightarrow \tan^2 x+2\tan x+1=0 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

Nhận xét: *Dùng bất đẳng thức Cô si cho 2 số dương nghịch đảo, ta có thể đánh giá t như sau:*

$|t|=|\tan x+\cot x|=|\tan x|+|\cot x|\geq 2\sqrt{|\tan x|.|\cot x|}=2$ *để đưa ra điều kiện* $|t|\geq 2$.

❸ Điều kiện: $\begin{cases} \sin x\neq 0 \\ \cos x\neq 0 \end{cases}$. PT $\Leftrightarrow 3(\tan^2 x+\cot^2 x)+4(\tan x+\cot x)+2=0$

Đặt $t=\tan x+\cot x \Rightarrow t^2=\tan^2 x+\cot^2 x+2$, $\left(|t|\geq 2\right)$.

PT trở thành: $3(t^2-2)+4t+2=0 \Leftrightarrow 3t^2+4t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{2}{3} \text{ (loại)} \\ t=-2 \end{array}\right.$

Khi đó $\tan x+\cot x=-2 \Leftrightarrow \tan^2 x+2\tan x+1=0 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$.

Kết hợp với điều kiện, phương trình có nghiệm: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \ (k\in\mathbb{Z})$.

MỘT SỐ KĨ THUẬT GIẢI PT LƯỢNG GIÁC

KĨ THUẬT 1: LỰA CHỌN CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Sử dụng các phép biến đổi góc lượng giác

Khi việc giải phương trình lượng giác cần xem xét mối quan hệ giữa các góc (cung) để từ đó kết hợp với các phép biến đổi góc đặc biệt, công thức cộng lượng giác để đưa về dạng góc cơ bản là một vấn đề rất then chốt trong việc giải phương trình lượng giác...

Bài 1. Giải các phương trình sau

❶ $\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\sin\left(x-\dfrac{3\pi}{2}\right)}=4\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}-x\right)$ (A08)

❷ $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{7}{8}\cot\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\cot\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$

❸ $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x$

❹ $\sin\left(2x+\dfrac{5\pi}{2}\right)-3\cos\left(x-\dfrac{7\pi}{2}\right)=1+2\sin x$

Hướng dẫn giải

❶ Nhận xét: *Từ sự xuất hiện hai cung $x-\dfrac{3\pi}{2}$ và $\dfrac{7\pi}{4}-x$ mà chúng ta liên tưởng đến việc đưa 2 cung này về cùng một cung x. Để làm được điều đó ta có thể sử dụng công thức cộng cung hoặc công thức về các góc đặc biệt.*

Điều kiện: $\sin x\neq 0,\cos x\neq 0\Leftrightarrow \sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$

$$(1)\Leftrightarrow \frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=-2\sqrt{2}(\cos x+\sin x)\Leftrightarrow(\sin x+\cos x)(\sqrt{2}\sin 2x+1)=0$$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm pt là: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi; x=-\dfrac{\pi}{8}+k\pi; x=\dfrac{5\pi}{8}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$.

❷ Điều kiện: $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right).\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)\neq 0\Leftrightarrow \cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)\neq\cos\dfrac{\pi}{2}=0$

Do $\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=\dfrac{\pi}{2}$ nên (2) $\Leftrightarrow \sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{7}{8}\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=\dfrac{7}{8}$

$\Leftrightarrow \sin 2x=\pm\dfrac{1}{2}$. Kết hợp với điều kiện ta được: $x=\pm\dfrac{\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

❸ Nhận xét: *Từ tổng hai cung* $\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)+\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=\dfrac{\pi}{2}$ *nên* $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)=1$

Điều kiện 1: $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\neq 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos\dfrac{\pi}{2}\right)\neq 0\Leftrightarrow\cos 2x\neq 0$

Điều kiện 2: $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\neq 0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}\left(\cos 2x-\cos\dfrac{\pi}{2}\right)\neq 0\Leftrightarrow\cos 2x\neq 0$

$$(3)\Leftrightarrow\sin^4 2x+\cos^4 2x=\cos^4 4x\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}\sin^2 4x=\cos^4 4x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^4 4x - \cos^2 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos^2 4x = 1 \\ \cos^2 4x = -\frac{1}{2} \text{ (loại)}\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 0 \\ \cos 2x = 0 \text{ (loại)}\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = k\frac{\pi}{2}$.

Chú ý:

✌ *Chắc hẳn các em sẽ ngạc nhiên bởi cách giải ngắn gọn này, nếu không có sự nhận xét về tổng hai cung mà quy đồng và biến đổi thì ... ra không?*

✌ *Việc giải điều kiện và đối chiếu với điều kiện đặc biệt là những phương trình có dạng phân thức như trên nếu không khôn khéo thì rất ... phức tạp.*

2. Sử dụng công thức biến đổi tổng sang tích và ngược lại

Khi giải pt mà gặp dạng tổng (hoặc hiệu) của sin (hoặc cos) với nhiều cung khác nhau ta cần để ý đến các cung có tổng (hiệu) các góc bằng nhau để áp dụng công thức tổng sang tích.

Bài 2. Giải các phương trình sau

❶ $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0$

❷ $\cos 3x\cos^3 x - \sin 3x\sin^3 x = \frac{2-3\sqrt{2}}{8}$

❸ $1 + \sin x + \cos 3x = \cos x + \sin 2x + \cos 2x$

❹ $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$

Hướng dẫn giải

① Nhận xét: *Bài toán có các cung khác nhau biểu diễn dưới dạng tổng (hiệu) của các hàm số sin (hàm số cos) ta nên ghép các số hạng này thành cặp sao cho tổng (hiệu) các cung của chúng bằng nhau, cụ thể trong trường hợp này ta để ý $x + 6x = 2x + 5x = 3x + 4x$. Tại sao lại cần phải ghép như vậy? Lý do là chúng ta cần xuất hiện thừa số chung để nhóm ra ngoài, đưa bài toán về dạng tích.*

PT $\Leftrightarrow (\sin 6x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 2x) + (\sin 4x + \sin 3x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\left(\cos\frac{5x}{2} + \cos\frac{x}{2} + \cos\frac{3x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 4\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}(2\cos x + 1) = 0$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = \frac{k2\pi}{7}, x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, \left(k \in \mathbb{Z}\right)$.

② *Đối với bài này mà sử dụng công thức nhân ba của sin và cos thì cũng ra nhưng phức tạp hơn. Chính vì thế mà ta khéo léo phân tích để áp dụng công thức tích sang tổng.*

$$(2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 2x\right)\cos^2 x + \frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 2x)\sin^2 x = \frac{2-3\sqrt{2}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \cos 2x\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \frac{2-3\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \cos 4x + \cos^2 2x = \frac{2-3\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{2}.$$

③ (ĐHNT HCM 2000) PT $\Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \sin x - \sin 2x + \cos 3x - \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 2\sin x\cos x - 2\sin 2x\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\sin x - 2\cos x - 2\sin 2x + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \\ 2(\sin x - \cos x) - 4\sin x\cos x + 1 = 0\end{array}\right.$$

ĐS: $x = k\pi, x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$

④ (ĐHCS 2000) PT $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + \sin x - \sin^3 x + \cos x - \cos^3 x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos x + \sin x\cos^2 x + \cos x\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin x\cos x(2 + \sin x + \cos x) = 0$

ĐS: $x = k\frac{\pi}{2}$.

Bài 3. Giải các phương trình sau

❶ $\sin 2x\sin 5x = \sin 3x\sin 4x$

❷ $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$ (D2005)

❸ $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0$ (D2009)

❹ $\sin x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$ (B2009)

Hướng dẫn giải

① $\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos 7x - \cos 3x) = \frac{1}{2}(\cos 7x - \cos x) \Leftrightarrow \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow 3x = \pm x + k2\pi \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}$.

② PT $\Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{2}\left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin 2x\right) - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x = 1\\ \sin 2x = -2 \text{ (loai)}\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

③ Nhận xét: *Từ sự xuất hiện các cung $5x, 3x, 2x, x$ và $3x + 2x = 5x$ ta nghĩ ngay đến việc áp dụng công thức tích sang tổng để đưa về cung $5x$. Còn cung x thì xử lí thế nào, ta quan sát lời giải sau:*

PT $\Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - \sin 5x - \sin x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{12} - k\frac{\pi}{3}\\ x = -\frac{\pi}{6} - k\frac{\pi}{2}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \frac{\pi}{12} - k\frac{\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{6} - k\frac{\pi}{2}$.

Chú ý: *Đối với dạng phương trình $a\sin x + b\cos x = a'\sin kx + b'\cos kx, k \neq 0,1$ ta coi như 2 vế của phương trình là 2 phương trình bậc nhất với sin và cos. Do đó ta có cách làm tương tự.*

④ PT $\Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin^2 x) + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$

$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x$

$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow 4x = \pm\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi\\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7}\end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$

3. Sử dụng công thức hạ bậc

Khi giải các phương trình lượng giác mà bậc của sin và cos là bậc chẵn ta thường hạ bậc từ đó đưa về phương trình cơ bản.

Bài 4. Giải các phương trình sau

❶ $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \dfrac{3}{2}$

❷ $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$ (B02)

❸ $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$ (D03)

❹ $\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0$ (A05)

Hướng dẫn giải

① (ĐHAG2000) *Từ sự xuất hiện bậc chẵn của hàm số sin và tổng hai cung* $\dfrac{6x+2x}{2} = 4x$ *mà ta nghĩ đến việc hạ bậc và sử dụng công thức biến tổng sang tích sau đó nhóm các hạng tử để đưa về phương trình tích.*

PT $\Leftrightarrow \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\cos 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 4x = 0\\ \cos 2x = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{4}, x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi.$

② PT $\Leftrightarrow \dfrac{1-\cos 6x}{2} - \dfrac{1+\cos 8x}{2} = \dfrac{1-\cos 10x}{2} - \dfrac{1+\cos 12x}{2}$

$\Leftrightarrow (\cos 12x + \cos 10x) - (\cos 8x + \cos 6x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 11x\cos x - 2\cos 7x\cos x = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos 11x - \cos 7x) = 0 \Leftrightarrow \cos x\sin 9x\sin 2x = 0$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = k\dfrac{\pi}{9}; x = k\dfrac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z}).$

③ Điều kiện: $\cos x \neq 0.$

PT $\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\left[1 - \cos\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)\right]\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{2}(1+\cos x) \Leftrightarrow (1-\sin x)\sin^2 x = (1+\cos x)\cos^2 x$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(1+\cos x)(\sin x + \cos x) = 0$

ĐS: Kết hợp với điều kiện ta được $x = \pi + k2\pi, x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi.$

④ PT $\Leftrightarrow \dfrac{1+\cos 6x}{2}\cos 2x - \dfrac{1+\cos 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos 6x.\cos 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos 8x + \cos 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 4x + \cos 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\dfrac{\pi}{2}.$

Bài 5. Giải các phương trình sau

❶ $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$ (B07)

❷ $\cos^4 x + \sin^4\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$

❸ $(2-\sqrt{3})\cos x - 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos x - 1$

❹ $3\tan^3 x - \tan x + \dfrac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x} - 8\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right) = 0$

Hướng dẫn giải

① PT $\Leftrightarrow \sin 7x - \sin x - (1 - 2\sin^2 2x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos 4x.\sin 3x - \cos 4x = 0$

$\Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$.

Vậy PT có nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}, x = \dfrac{5\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}.$

② (ĐHL1995) $(1+\cos 2x)^2+(1+\sin 2x)^2=1 \Leftrightarrow \sin 2x+\cos 2x=-1$

$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,(k\in\mathbb{Z}).$

③ (DB03) $\Leftrightarrow -\sqrt{3}\cos x+\sin x=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi.$

④ (KT1999) $\Leftrightarrow 3\tan^3 x-\tan x+\frac{3(1+\sin x)}{\cos^2 x}-4(1+\sin x)=0$

$\Leftrightarrow \tan x(3\tan^2 x-1)+(1+\sin x)(3\tan^2 x-1)=0 \Leftrightarrow (3\tan^2 x-1)(\tan x+1+\sin x)=0$

TH1: $\tan x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}.$

TH2: $1+\sin x+\tan x=0 \Leftrightarrow \sin x+\cos x+\sin x\cos x=0$ (pt đối xứng với sin và cos)

Giải phương trình này được $x=\frac{\pi}{4}\pm\arccos\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)+k2\pi, k\in\mathbb{Z}.$

4. Sử dụng các đẳng thức lượng giác quan trọng (hằng đẳng thức)

Bài 6. Giải các phương trình sau

❶ $\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2+\sqrt{3}\cos x=2$ (D07)

❷ $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$ (B03)

❸ $\tan x=\cot x+2\cot^3 2x$

❹ $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x)$

Hướng dẫn giải

① $\Leftrightarrow 1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos x=2 \Leftrightarrow \sin x+\sqrt{3}\cos x=2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=1 \Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z}).$

② Nhận xét: *Từ sự xuất hiện của* $\cot x-\tan x$ *và* $\sin 2x$ *ta xem chúng có mối quan hệ nào?*

Ta có $\cot x-\tan x=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}$. *Từ đó ta định hướng giải cho bài toán như sau:*

Điều kiện: $\sin 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$

PT $\Leftrightarrow 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x}+4\sin 2x=\frac{2}{\sin 2x}$ $\cos 2x+2\sin^2 2x=1 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x=1 \Rightarrow \sin 2x=0 \text{ (loại)} \\ \cos 2x=-\frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x=\frac{3}{4} \text{ (t/m)} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi.$

Chú ý: *Ta có thể đặt* $t=\tan x \Rightarrow \cot x=\frac{1}{t}, \sin 2x=\frac{2t}{1-t^2}$ *đưa phương trình về ẩn* t *để giải.*

③ (ĐHQGHN1996) Điều kiện $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x} = 2\cot^3 2x \Leftrightarrow -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2\cot^3 2x \Leftrightarrow \cot 2x + \cot^3 2x = 0$$

$\Leftrightarrow \cot 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ (t/m).

④ (GTVT1998) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 2(\sin 2x + \cos 2x) \Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x} = 2(\sin 2x + \cos 2x)$$

$\Leftrightarrow 1 = \sin^2 2x + \sin 2x \cos 2x \Leftrightarrow \cos^2 2x = \sin 2x \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \tan 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \end{array}\right., (k \in \mathbb{Z}).$$

Bài 7. Giải các phương trình sau

❶ $\cos^6 x - \sin^6 x = \frac{13}{8}\cos^2 2x$

❷ $\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$ (A06)

❸ $\frac{\cos^4 x + \sin^4 x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\cot 2x - \frac{1}{8\sin 2x}$

❹ $\cot x = \tan x + \frac{2\cos 4x}{\sin 2x}$

Hướng dẫn giải

① Nhận xét: *Xuất hiện* $\cos^6 x - \sin^6 x$ *ta nghĩ đến việc sử dụng hằng đẳng thức* $a^3 - b^3$.

$$\text{PT} \Leftrightarrow (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^4 x + \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x) = \frac{13}{8}\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{1}{4}\sin^2 2x) = \frac{13}{8}\cos^2 2x \Leftrightarrow \cos 2x(8 - 2\sin^2 2x - 13\cos 2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ 2\cos^2 2x - 13\cos 2x + 6 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = 0 \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi \end{array}\right. (k \in \mathbb{Z}).$$

② Điều kiện: $\sin x \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{array}\right.$

$\text{PT} \Leftrightarrow 2(\cos^4 x + \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x) - \sin x \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 2 - 6\sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

③ (DB2002) Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{1-\frac{1}{2}\sin^2 2x}{5\sin 2x} = \frac{1}{2}\frac{\cos 2x}{\sin 2x} - \frac{1}{8\sin 2x} \Leftrightarrow \cos^2 2x - 5\cos 2x + \frac{9}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi.$$

④Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{2\cos 4x}{\sin 2x} \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - \cos 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k\pi.$$

Bài 8. Giải các phương trình sau

❶ $(1-\tan x)(1+\sin 2x) = 1+\tan x$

❷ $\cot x + \sin x(1+\tan x\tan\frac{x}{2}) = 4$ (B06)

❸ $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

❹ $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)} = \sqrt{3}$ (A09)

Hướng dẫn giải

① Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{PT} \Leftrightarrow (\cos x - \sin x)(\sin x + \cos x)^2 = \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \cos^2 x - \sin^2 x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \cos 2x = 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \text{ (t/m)}\\ x = k\pi \text{ (t/m)}\end{array}\right..$$

<u>Chú ý</u>: *Ta có thể đặt* $t = \tan x \Rightarrow \sin 2x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ *để đưa phương trình về dạng đại số ẩn* t.

② Điều kiện: $\sin x \neq 0, \cos x \neq 0, \cos\frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \cot x + \sin x\frac{\cos x\cos\frac{x}{2} + \sin x\sin\frac{x}{2}}{\cos x\cos\frac{x}{2}} = 4 \Leftrightarrow \cot x + \tan x = 4 \Leftrightarrow 1 = 4\sin x\cos x$$

Giải $\sin 2x = \frac{1}{2}$ và kết hợp với điều kiện, thu được nghiệm: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi, x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.

③ (A2010) Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \tan x \neq -1\end{cases}$

$$\text{PT} \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(1+\sin x+\cos 2x) = (1+\tan x)\cos x$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(1+\sin x+\cos 2x) = \sin x+\cos x \Leftrightarrow \sin x + \cos 2x = 0$$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{1}{2}$

Kết hợp với điều kiện, thu được nghiệm của phương trình là: $x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi, x = \dfrac{7\pi}{6} + k2\pi.$

④ Điều kiện: $\sin x \neq 1, \sin x \neq -\dfrac{1}{2}$

PT $\Leftrightarrow (1 - 2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)$

$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}(1 - 2\sin^2 x)$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}.$

Kết hợp với điều kiện ta được nghiệm của phương trình là $x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}(k \in \mathbb{Z}).$

Chú ý: *Có thể sử dụng đẳng thức* $\dfrac{\cos x}{1 - \sin x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos x(1 - \sin x)} = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}$ *đưa phương trình về dạng* $\dfrac{-\sin x + \cos 2x}{\cos x + \sin 2x} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right).$

KĨ THUẬT 2: ĐƯA VỀ PHƯƠNG TRÌNH TÍCH

Xu hướng trong đề thi đại học những năm gần đây việc giải phương trình lượng giác thường đưa về phương trình tích bằng cách sử dụng các công thức lượng giác, các phép biến đổi lượng giác, các kĩ năng tách, nhóm các số hạng hợp lý để tạo ra nhân tử chung...

Bài 1. Giải các phương trình sau

❶ $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

❷ $(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$

❸ $\cos 2x + 3\sin 2x + 5\sin x - 3\cos x = 3$

❹ $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$

❺ $\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

❻ $(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

Hướng dẫn giải

① (B-2005) $\Leftrightarrow \sin x + \cos x + 2\sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 0$

② (D2004) PT $\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin x(2\cos x - 1)$

$\Leftrightarrow (2\cos x - 1)(\sin x + \cos x) = 0$

③ PT $\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 6\sin x\cos x + 5\sin x - 3\cos x = 3$

$\Leftrightarrow 3\cos x(2\sin x - 1) - (2\sin^2 x - 5\sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(3\cos x - \sin x + 2) = 0$

④ (D2008) $\Leftrightarrow 4\sin x\cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + 2\cos x \Leftrightarrow (2\cos x + 1)(2\sin x\cos x - 1) = 0$

⑤ (D2010) PT $\Leftrightarrow 2\sin x\cos x - (1 - 2\sin^2 x) + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0$

$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x - 1) + (2\sin x - 1)(\sin x + 2) = 0 \Leftrightarrow (2\sin x - 1)(\cos x + \sin x + 2) = 0$

⑥ (B2010) PT $\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x + \cos 2x\cos x + 2\cos 2x - \sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos^2 x - 1) + \cos 2x(\cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow \sin x\cos 2x + \cos 2x(\cos x + 2) = 0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin x + \cos x + 2) = 0$

Bài 2. **Giải các phương trình sau**

❶ $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$

❷ $\tan 2x+\cot x=8\cos^2 x$

❸ $2\tan x+\cot x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}$

❹ $\cos 2x+\cos x(2\tan^2 x-1)=2$

❺ $\frac{1}{\tan x+\cot 2x}=\frac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{\cot x-1}$

❻ $\cot x-1=\frac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x$

Hướng dẫn giải

① (ĐHQGHN1997) Điều kiện: $\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$

PT $\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sin 2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ \sin 2x=1\end{array}\right.$

Giải và kết hợp với điều kiện thu được: $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ hay $x=\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$.

② Điều kiện: $\cos 2x\neq 0,\sin x\neq 0$

PT $\Leftrightarrow\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\sin x}{\cos x}=8\cos^2 x\Leftrightarrow\frac{\sin 2x\sin x+\cos 2x\cos x}{\cos 2x\sin x}=8\cos^2 x$

$\Leftrightarrow\cos x(1-8\cos x\cos 2x\sin x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \sin 4x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$

ĐS: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi\vee x=\frac{\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{5\pi}{24}+k\frac{\pi}{2}$.

③ (ĐHNT1997) Điều kiện: $\sin x\neq 0,\cos x\neq 0$

$\Leftrightarrow\frac{2\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sin x\cos x}\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\cos^2 x=\sqrt{3}\sin x\cos x+1$

$\Leftrightarrow 1+\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x\cos x+1\Leftrightarrow\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\text{ (loại)}\\ \sin x=\sqrt{3}\cos x\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow\tan x=\sqrt{3}\ \ x=\frac{\pi}{3}+k\pi.$

④ (DB2003) Điều kiện: $\cos x\neq 0$

$\Leftrightarrow\cos 2x+2\frac{\sin^2 x}{\cos x}-\cos x=2\Leftrightarrow 2\frac{\sin^2 x}{\cos x}+\cos 2x-1=1+\cos x$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)=1+\cos x\Leftrightarrow(1+\cos x)\left[2(1-\cos x)^2-\cos x\right]=0$

ĐS: $x=\pi+k2\pi, x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi.$

⑤ Điều kiện: $\left\{\begin{array}{l}\cos x.\sin 2x.\sin x(\tan x+\cot 2x)\neq 0\\ \cot x\neq 1\end{array}\right.$

PT $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x}}=\dfrac{\sqrt{2}(\cos x-\sin x)}{\dfrac{\cos x}{\sin x}-1} \Leftrightarrow \dfrac{\cos x\sin 2x}{\cos x}=\sqrt{2}\sin x$

$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x-\sqrt{2})=0$

Kết hợp với điều kiện thu được nghiệm của phương trình là: $x=-\dfrac{\pi}{4}+k2\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

⑥ (A2003) Điều kiện: $\cos x\neq 0,\sin x\neq 0,\tan x\neq -1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\dfrac{\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)}{\cos x+\sin x}+\sin^2 x-\sin x\cos x$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)\left(\dfrac{1}{\sin x}-\cos x+\sin x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0\\ \sin^2 x-\sin x\cos x-1=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=1\\ 2\tan^2 x-\tan x+1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$(t/m)

Bài 3. Giải các phương trình sau

❶ $\sin^3 x+\cos^3 x=2(\sin^5 x+\cos^5 x)$ ❷ $\sin^6 x+\cos^6 x=2(\sin^8 x+\cos^8 x)$

❸ $\sin^8 x+\cos^8 x=2(\sin^{10} x+\cos^{10} x)+\dfrac{5}{4}\cos 2x$ (ĐHNT HCM2000)

Hướng dẫn giải

① $\Leftrightarrow \sin^3 x(1-2\sin^2 x)=\cos^3 x(2\cos^2 x-1)\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^3 x-\cos^3 x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \tan x=1\end{array}\right.$.

② (QGHN99) PT $\Leftrightarrow \sin^6 x(1-2\sin^2 x)-\cos^6 x(2\cos^2 x-1)=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\sin^6 x-\cos^6 x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \tan x=\pm 1\end{array}\right.$.

③ PT $\Leftrightarrow \sin^8 x(1-2\sin^2 x)+\cos^8 x(1-2\cos^2 x)-\dfrac{5}{4}\cos 2x=0$

$\Leftrightarrow \cos 2x\left(\cos^8 x-\sin^8 x+\dfrac{5}{4}\right)=0$.

Bài 4. Giải các phương trình sau

❶ $3-\tan x(\tan x+2\sin x)+6\cos x=0$ (DB2003)

❷ $3\tan 3x+\cot 2x=2\tan x+\dfrac{2}{\sin 4x}$

❸ $\dfrac{4\cos^3 x+2\cos^2 x(2\sin x-1)-\sin 2x-2(\sin x+\cos x)}{2\sin^2 x-1}=0$

❹ $\sin 2x\left(\cos x+3\right)-2\sqrt{3}\cos^3 x-3\sqrt{3}\cos 2x+8(\sqrt{3}\cos x-\sin x)-3\sqrt{3}=0$

❺ $8\sqrt{2}\cos^6 x+2\sqrt{2}\sin^3 x\sin 3x-6\sqrt{2}\cos^4 x-1=0$

❻ $3(\cot x-\cos x)-5(\tan x-\sin x)=2$

Hướng dẫn giải

① (DB2003) Điều kiện: $\cos x\neq 0$

PT $\Leftrightarrow 3-\dfrac{\sin x}{\cos x}\left(\dfrac{\sin x+2\sin x\cos x}{\cos x}\right)+6\cos x=0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x-\sin^2 x(1+2\cos x)+6\cos^3 x=0$

$\Leftrightarrow 3\cos^2 x(1+2\cos x)-\sin^2 x(1+2\cos x)=0 \Leftrightarrow (1+2\cos x)(3\cos^2 x-\sin^2 x)=0$

ĐS: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,(k\in\mathbb{Z})$.

②* Điều kiện: $\begin{cases}\cos 3x\neq 0\\ \cos x\neq 0\\ \sin 4x\neq 0\\ \sin 2x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}, x\neq k\dfrac{\pi}{4}$

PT $\Leftrightarrow 2(\tan 3x-\tan x)+(\tan 3x+\cot 2x)=\dfrac{2}{\sin 4x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sin 2x}{\cos 3x\cos x}+\dfrac{\cos x}{\cos 3x\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 4x}$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x\sin x+2\cos 2x\cos x=2\cos 3x \Leftrightarrow 4\sin 4x\sin x+\cos 3x+\cos x=2\cos 3x$

$\Leftrightarrow 4\sin 4x\sin x=\cos 3x-\cos x \Leftrightarrow 8\sin 2x\cos 2x\sin x=-2\sin 2x\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 2x\sin x(4\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \cos 2x=-\dfrac{1}{4}$ (t/m)

Cách 2 (*Bạn Hồng& Thanh Tùng A1*) Điều kiện: $x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{3}, x\neq k\dfrac{\pi}{4}$.

PT $\Leftrightarrow 3\tan 3x+\cot 2x=2\tan x+\tan 2x+\cot 2x \Leftrightarrow 3\tan 3x-2\tan x-\tan 2x=0$

$\Leftrightarrow 2(\tan 3x-\tan x)+\tan 3x-\tan 2x=0 \Leftrightarrow \dfrac{2\sin 2x}{\cos 3x\cos x}+\dfrac{\sin x}{\cos 3x\cos 2x}=0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2\sin 2x\cos 2x+\sin x\cos x}{\cos 3x\cos x\cos 2x}=0 \Leftrightarrow \sin 2x\left(4\cos 2x+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2x=0\ \text{(loại)}\\ 4\cos 2x+1=0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \cos 2x=-\dfrac{1}{4}$ (t/m).

Vậy phương trình có nghiệm $x=\pm\dfrac{1}{2}\arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right)+k\pi$.

③ Điều kiện: $2\sin^2 x-1\neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}$

PT $\Leftrightarrow 4\cos^2 x(\cos^2 x+\sin x)-2\cos x(\cos x+\sin x)-2(\sin x+\cos x)=0$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)(\cos x-1)(2\cos x-1)$

Kết hợp với điều kiện thu được nghiệm của phương trình: $x=k\dfrac{2\pi}{3},\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

④ PT $\Leftrightarrow 2\sin x\cos^2 x+6\sin x\cos x-2\sqrt{3}\cos^3 x-6\sqrt{3}\cos^2 x+8(\sqrt{3}\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)+6\cos x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)+8(\sqrt{3}\cos x-\sin x)=0$

$\Leftrightarrow (\sin x-\sqrt{3}\cos x)(2\cos^2 x+6\cos x-8)=0$

⑤ PT $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cos^3 x(4\cos^3 x-3\cos x)+2\sqrt{2}\sin^3 x\sin 3x-1=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(2\cos x\cos 3x\right)+2\sin^2 x(2\sin x\sin 3x)=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow (1+\cos 2x)(\cos 2x+\cos 4x)+(1-\cos 2x)(\cos 2x-\cos 4x)=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow 2(\cos 2x+\cos 2x\cos 4x)=\sqrt{2}\Leftrightarrow \cos 2x\cos^2 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow \cos 2x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{8}+k\pi.$

⑥ Điều kiện: $\sin x\neq 0,\cos x\neq 0$.

PT $\Leftrightarrow 3(\cot x-\cos x+1)-5(\tan x-\sin x+1)=0$

$\Leftrightarrow 3\left(\dfrac{\cos x-\sin x\cos x+\sin x}{\sin x}\right)-5\left(\dfrac{\sin x-\sin x\cos x+\cos x}{\cos x}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x\cos x+\sin x=0\\ \dfrac{3}{\sin x}=\dfrac{5}{\cos x}\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t^2-2t-1=0\ (\text{với } t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos(x-\frac{\pi}{4}))\\ \tan x=\dfrac{5}{3}\end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện thu được: $x=\dfrac{\pi}{4}\pm\arccos\dfrac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+k2\pi$, $x=\arctan\dfrac{3}{5}+k\pi.$

KĨ THUẬT 3: ĐẶT ẨN PHỤ

1. Chọn góc để đặt ẩn phụ

Bài 1. Giải các phương trình sau

❶ $\sin\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{3x}{2}\right)$ ❷ $\cos x-2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)=3$

❸ $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ ❹ $\sin\left(\dfrac{5x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\cos\dfrac{3x}{2}$

Hướng dẫn giải

① Nhận xét: *Nhìn vào phương trình này ta nghĩ dùng công thức biến đổi sin của một tổng ... nhưng đừng vội làm như thế khó ra lắm, ta xem mối quan hệ giữa hai cung* $\left(\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\right)$ *và* $\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{3x}{2}\right)$ *có quan hệ với nhau như thế nào?*

Thật vậy nếu ta đặt $t=\dfrac{3\pi}{10}-\dfrac{x}{2}\Rightarrow 3t=\dfrac{9\pi}{10}-\dfrac{3x}{2}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{3x}{2}\right)$ *thì khi đó sử dụng công thức góc nhân ba là biến đổi dễ dàng.*

PT $\Leftrightarrow \sin t=\dfrac{1}{2}\sin 3t\Leftrightarrow \sin t=\dfrac{1}{2}\left(3\sin t-4\sin^3 t\right)\Leftrightarrow \sin t(1-\sin^2 t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin t=0\\ \cos t=0\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\dfrac{3\pi}{5}-k2\pi, x=\dfrac{3\pi}{5}\pm\dfrac{\pi}{6}-k4\pi,\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Chú ý: *Nếu không quen với cách biến đổi trên, ta có thể làm như sau:*

$t=\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\Rightarrow x=\frac{3\pi}{5}-2t\Rightarrow \frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}=\pi-t$.

② Đặt $t=\frac{3\pi}{2}-\frac{x}{2}\Rightarrow x=3\pi-2t$. PT $\Leftrightarrow \cos(3\pi-2t)-2\sin t=3\Leftrightarrow \sin^2 t-\sin t-2=0$.

③ Đặt $t=x+\frac{\pi}{4}$. ĐS: $x=-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

④ Đặt $t=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\Rightarrow \frac{3x}{2}=3t+\frac{3\pi}{4},\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=5t+\pi$.

PT $\Leftrightarrow \sin(5t+\pi)-\cos t=\sqrt{2}\cos\left(3t+\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \sin 5t+\cos t=\cos 3t+\sin 3t$

$\Leftrightarrow \sin 5t-\sin 3t=\cos 3t-\cos t\Leftrightarrow 2\sin t(\cos 4t+\sin 2t)=0$.

Chú ý: *Có thể chuyển* $\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$ *rồi áp dụng công thức tổng sang tích cho vế trái.*

Bài 2. Giải các phương trình sau

❶ $8\cos^3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x$

❷ $\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-1$

❸ $\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)-\sqrt{6}\sin\left(\frac{x}{5}-\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\left(\frac{x}{5}+\frac{2\pi}{3}\right)-2\sin\left(\frac{3x}{5}+\frac{\pi}{6}\right)$

Hướng dẫn giải

① Đặt $t=x+\frac{\pi}{3}$. ĐS: $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,x=-\frac{2\pi}{3}+k\pi,x=k\pi$

② Đặt $t=x-\frac{\pi}{4}$. PT $\Leftrightarrow \tan^3 t=\frac{1+\tan t}{1-\tan t}-1\Leftrightarrow (1-\tan t)\tan^3 t=2\tan t$.

③ (ĐHYTB1997) ĐS: $x=\frac{5\pi}{4}+k5\pi,x=-\frac{5\pi}{12}+k5\pi,x=-\frac{5\pi}{3}+k5\pi.$

2. Chọn biểu thức để đặt ẩn phụ

Bài 3. Giải các phương trình sau

❶ $3\sin x+4\cos x+\frac{6}{3\sin x+4\cos x+1}=6$

❷ $\sin x+\sqrt{3}\cos x+\sqrt{\sin x+\sqrt{3}\cos x}=2$

❸ $\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}=\cos x+\frac{1}{\cos x}$

❹ $2\cos^2 2x+\cos 2x=4\sin^2 2x\cos^2 x$

❺ $1+3\tan x=2\sin 2x$

❻ $3\cot^2 x+2\sqrt{2}\sin^2 x=(3+2\sqrt{2})\cos x$

Hướng dẫn giải

① Đặt $t=3\sin x+4\cos x+1$ $(t\ne 0)$. Từ phương trình ta có $t^2-7t+6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=1\\t=6\end{array}\right.$.

② Đặt $t=\sqrt{\sin x+\sqrt{3}\cos x},(t\ge 0)$. Từ phương trình ta có $t=1,t=-2$ (loại).

Vậy $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{6}$

③ Đặt $t=\cos x+\dfrac{1}{\cos x}\Rightarrow \cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}=t^2-2$. Từ phương trình ta có $t=-1, t=2$.

④ $\Leftrightarrow 2\cos^2 2x+\cos 2x=2(1-\cos^2 2x)(1+\cos 2x)$. Do đó ta đặt $t=\cos 2x, |t|\le 1$.

⑤ Đặt $t=\tan x\Rightarrow \sin 2x=\dfrac{2t}{1+t^2}$.

Ngoài ra ta có thể khai triển đưa về phương trình đẳng cấp bậc 3 theo sin và cos.

⑥ $\Leftrightarrow 3\dfrac{(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x}+2\sqrt{2}(1-\cos^2 x)=(3+2\sqrt{2})\cos x$. Do đó đặt $t=\cos x, |t|\le 1$

Chú ý: *Có thể đưa phương trình về dạng tích* $(\sin^2 x-\cos x)(3\cos x-2\sqrt{2}\sin^2 x)=0$.

KĨ THUẬT 4: NHÓM BÌNH PHƯƠNG

1. Biến đổi phương trình về dạng $A^2 + B^2 = 0$

Bài 1. Giải các phương trình sau

❶ $4\cos^2 x+3\tan^2 x-4\sqrt{3}\cos x+2\sqrt{3}\tan x+4=0$

❷ $3+\sin^2 2x=2\sin 2x+\cos 2x+2\sqrt{2}\sin x$

❸ $4\cos^2 2x+2\cos 2x+6=4\sqrt{3}\sin x$

Hướng dẫn giải

① PT $\Leftrightarrow (4\cos^2 x-4\sqrt{3}\cos x+1)+(3\tan^2 x+2\sqrt{3}\tan x+1)=0$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos x-\sqrt{3}\right)^2+\left(\sqrt{3}\tan x+1\right)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos x-\sqrt{3}=0\\ \sqrt{3}\tan x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi.$$

② Nhận xét: *Vì xuất hiện* $\sin^2 2x$ *và* $2\sin 2x$ *ta nghĩ đến việc đưa về* $(\sin 2x-1)^2$ *do đó ta biến đổi như sau:*

PT $\Leftrightarrow \sin^2 2x-2\sin 2x+1+(1-\cos 2x)-2\sqrt{2}\sin x+1=0$

$$\Leftrightarrow \left(\sin 2x-1\right)^2+\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)^2=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+k2\pi\\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi\end{array}\right..$$

③ Nhận xét: *Vì xuất hiện* $4\cos^2 2x$ *và* $\cos 2x$ *ta nghĩ đến việc đưa về* $(2\cos 2x\pm 1)^2$, *phần còn lại ta biến đổi về* $\sin^2 x$.

PT $\Leftrightarrow 4\cos^2 2x+4\cos 2x+1+4\sin^2 x-4\sqrt{3}\sin x+3=0$

$$\Leftrightarrow \left(2\cos 2x+1\right)^2+\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)^2=0\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \cos 2x=-\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ x=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right..$$

2. Biến đổi phương trình về dạng $A^2 = B^2$

Bài 2. Giải các phương trình sau

❶ $\sin 2x=2\tan x+\tan^2 x$

❷ $\tan^2 x+\sin^2 2x=4\cos^2 x$

❸ $\dfrac{1}{\sin^2 x}+4\tan x=4\tan^2 x+2$

❹ $4\cot x=4\cot^2 x+\dfrac{2\cos 2x}{1+\cos 2x}$

❺ $\sin^2 2x = \cos 2x + \cos 3x - \cos x$	❻ $\cos^2 3x + \cos^2 x + 3\cos^2 2x + \cos 2x = 2$
❼ $32\cos^6 \frac{x}{2} + \sin 3x = 3\sin x$	

Hướng dẫn giải

① PT $\Leftrightarrow 1 + 2\sin x\cos x = 1 + 2\tan x + \tan^2 x \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 = (1 + \tan x)^2$

② Nhận xét: *Ta nhận thấy* $\tan x \sin 2x = 2\sin^2 x$ *do đó ta cộng vào 2 vế 1 lượng* $4\sin^2 x$.

PT $\Leftrightarrow \tan^2 x + 2\tan x\sin 2x + \sin^2 2x = 4\cos^2 x + 4\sin^2 x \Leftrightarrow (\tan x + \sin 2x)^2 = 4$

③ Nhận xét: *Vì chúng ta nhận thấy xuất hiện* $4\tan^2 x$ *và* $4\tan x$ *nên ta chuyển vế để đưa về dạng hằng đẳng thức* $(2\tan x - 1)^2$.

PT $\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 x} - 1 = 4\tan^2 x - 4\tan x + 1 \Leftrightarrow \cot^2 x = (2\tan x - 1)^2 \Leftrightarrow 2\tan x - 1 = \pm\cot x$

④ Nhận xét: *Vì nhìn thấy xuất hiện* $4\cot^2 x$ *và* $4\cot x$ *nên ta chuyển vế để xuất hiện* $(2\cot x - 1)^2$.

PT $\Leftrightarrow 4\cot^2 x - 4\cot x + 1 + \frac{\cos 2x - 1}{1 + \cos 2x} = 0 \Leftrightarrow \left(2\cot x - 1\right)^2 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 0$

$\Leftrightarrow \left(2\cot x - 1\right)^2 = \tan^2 x \Leftrightarrow 2\cot x - 1 = \pm\tan x$.

⑤ Nhận xét: *Do xuất hiện nhiều góc khác nhau nên ta biến đổi* $\cos 3x - \cos x = -2\sin 2x\sin x$, *sau đó do vế trái có* $\sin^2 2x$ *nên ta đưa về* $(\sin 2x + \sin x)^2$.

PT $\Leftrightarrow \sin^2 2x = \cos 2x - 2\sin 2x\sin x \Leftrightarrow (\sin 2x + \sin x)^2 = \cos 2x + \sin^2 x$

$\Leftrightarrow (\sin 2x + \sin x)^2 = \cos^2 x$

⑥ Nhận xét: *Do xuất hiện* $\cos^2 3x + \cos^2 x$ *nên ta nghĩ đến hằng đẳng thức* $(\cos 3x + \cos x)^2$. *Vì thế ta cộng thêm cả hai vế với* $2\cos 3x\cos x$ *và ở vế phải ta dùng công thức biến đổi tích sang tổng* $2\cos 3x\cos x = \cos 4x + \cos 2x$.

PT $\Leftrightarrow \cos^2 3x + 2\cos 3x\cos x + \cos^2 x = 2 - 3\cos^2 2x - \cos 2x + 2\cos 3x\cos x$

$\Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x)^2 = 2 - 3\cos^2 2x + \cos 4x \Leftrightarrow (\cos 3x + \cos x)^2 = \sin^2 2x$

❼ $32\cos^6 \frac{x}{2} + \sin 3x = 3\sin x \Leftrightarrow 32\cos^6 \frac{x}{2} = 3\sin x - \sin 3x \Leftrightarrow 4\left(2\cos^2 \frac{x}{2}\right)^3 = 4\sin^3 x$

$\Leftrightarrow 1 + \cos x = \sin x \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

KĨ THUẬT 5: XỬ LÍ PHƯƠNG TRÌNH CÓ ĐIỀU KIỆN

1. Biểu diễn nghiệm và điều kiện qua cùng một hàm số lượng giác

Trong phần này cần sử dụng tốt các kết quả sau:

$\sin x \neq 0 \Leftrightarrow \cos^2 x \neq \pm 1;$	$\cos^2 x = \pm 1 \Leftrightarrow \sin x = 0;$
$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq \pm 1$	$\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow \cos x = 0$
$\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq \pm 1 \\ \sin x \neq \pm 1 \end{cases}$	$\left[\begin{array}{l} \cos x = \pm 1 \\ \sin x = \pm 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$

Bài 1. **Giải các phương trình sau**

❶ $\dfrac{1}{\cos x}+\dfrac{1}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 4x}$ (THTT09)

❷ $\dfrac{\sin^2 2x+\cos^4 2x-1}{\sqrt{\sin x\cos x}}=0$

❸ $\cot x+\sin x\left(1+\tan x\tan\dfrac{x}{2}\right)=4$ (B06)

❹ $\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1+\tan x}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

❺ $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x$

Hướng dẫn giải

① (THTT09) Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0,\\ \sin 2x\neq 0,\\ \sin 4x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\neq\pm 1,\\ \sin x\neq 0,\\ \sin x\neq\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Khi đó PT $\Rightarrow 4\sin x\cos 2x+2\cos 2x=2\Leftrightarrow\sin x\left(2\sin^2 x+\sin x-1\right)=0$

Giải các nghiệm $\sin x$ và kết hợp điều kiện ta được: $\sin x=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$.

② Điều kiện: $\sin 2x>0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$\sin^2 2x+\cos^4 2x-1=0\Leftrightarrow\cos^4 2x-\cos^2 2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos^2 2x=0\\ \cos^2 2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin 2x=\pm 1\\ \sin 2x=0\end{array}\right.$

Đối chiếu với điều kiện ta được: $\sin 2x=1\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$.

③ (B2006) Điều kiện: $\left\{\sin x\neq 0,\cos x\neq 0,\cos\dfrac{x}{2}\neq 0\Leftrightarrow\sin 2x\neq 0\right.$

PT $\Rightarrow\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x\cos\frac{x}{2}}\left(\cos x\cos\dfrac{x}{2}+\sin x\sin\dfrac{x}{2}\right)=4\Leftrightarrow\dfrac{\cos x}{\sin x}+\dfrac{\sin x}{\cos x}=4$

$\Leftrightarrow\dfrac{2}{\sin 2x}=4\Leftrightarrow\sin 2x=\dfrac{1}{2}$ (t/m) $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{12}+k2\pi,\\ x=\dfrac{5\pi}{12}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$.

④ (A2010) Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \tan x\neq -1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin x\neq\pm 1\\ \tan x\neq -1\end{cases}$

Khi đó PT $\Rightarrow\dfrac{(1+\sin x+\cos 2x)\left(\sin x+\cos x\right)\cos x}{\sqrt{2}(\cos x+\sin x)}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x$

$\Leftrightarrow 1+\sin x+\cos 2x=1\Leftrightarrow\sin x+1-2\sin^2 x=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \ \text{(loại)} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \ \text{(t/m)} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right.$.

⑤ Điều kiện: $\left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0, \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 0, \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0, \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \neq 0. \right.$

$\Leftrightarrow \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \neq 0, \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \neq 0 \right. \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq \pm 1.$

Nhận thấy $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$, do đó phương trình đã cho trở thành

$\sin^4 2x + \cos^4 2x = \cos^4 4x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{2}\sin^4 4x = \cos^4 4x \Leftrightarrow 2\cos^4 4x - \cos^2 4x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos^2 4x = 1 \Leftrightarrow \sin 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos 2x = 0 \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện ta được $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$.

2. Biểu diễn trên đường tròn lượng giác

❑ *Mỗi cung (hoặc góc) lượng giác được biểu diễn bởi các điểm trên đường tròn lượng giác:*

$x = \alpha + k2\pi$ *được biểu diễn trên ĐTLG bởi 1 điểm xác định bởi cung* α.

$x = \alpha + k\pi$ *được biểu diễn trên ĐTLG bởi 2 điểm đối xứng nhau qua tâm* O.

$x = \alpha + k\frac{2\pi}{3}$ *được biểu diễn trên ĐTLG bởi 3 điểm cách đều nhau, tạo thành 3 đỉnh một tam giác đều.*

$x = \alpha + k\frac{2\pi}{n}$ *được biểu diễn trên ĐTLG bởi* n *điểm cách đều nhau, tạo thành đa giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.*

❑ *Ta biểu diễn trên ĐTLG những điểm không thỏa mãn điều kiện (đánh dấu $\times$) và những điểm nghiệm tìm được (đánh dấu ○). Những điểm đánh dấu "○" mà không trùng với những điểm đánh dấu "$\times$" chính là những điểm thỏa mãn điều kiện.*

Bài 2. Giải các phương trình sau

❶ $\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$ (D2011)

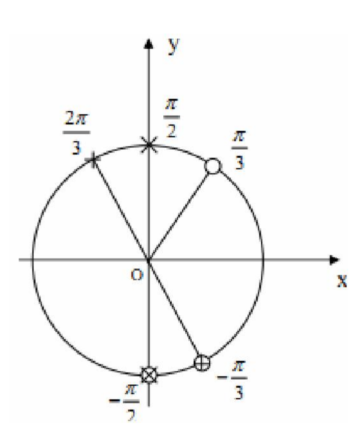
❷ $\frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$ (A06)

❸ $\frac{\sin x + \sin 2x}{\sin 3x} = -1$

❹ $\frac{(1 - 2\sin x)\cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$ (A2009)

Hướng dẫn giải

① Điều kiện: $\begin{cases} \tan x \neq -\sqrt{3} \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{3} + k\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$



Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos x(\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow (\sin x + 1)(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện trên đường tròn lượng giác ta được nghiệm của PT là $x = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi,\ (k \in \mathbb{Z})$.

② Điều kiện: $\sin x \neq \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases}$. Khi đó phương trình trở thành:

$2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow 2\left(1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \dfrac{1}{2}\sin 2x = 0$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 1\ \ x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

Kết hợp với điều kiện trên đường tròn LG ta được nghiệm của PT là: $x = \dfrac{5\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

③ Điều kiện: $\sin 3x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{3}$. Khi đó phương trình trở thành

$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0 \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\dfrac{\pi}{2} \\ x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + k2\pi \end{array}\right.$

Kết hợp với điều kiện trên đường tròn lượng giác, ta có nghiệm của PT là: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

④ Điều kiện: $\sin x \neq 1$ và $\sin x \neq -\dfrac{1}{2}$ (*)

Với điều kiện trên phương trình đã cho tương đương:

$(1 - 2\sin x)\cos x = \sqrt{3}(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)$

$\Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3}\sin x = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$ hoặc $x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3}$.

Kết hợp điều kiện (*) ta được nghiệm: $x = -\dfrac{\pi}{18} + k\dfrac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$.

3. Thử trực tiếp (dùng mệnh đề phủ định)

Chúng ta cần lưu ý các kết quả về tính chu kì của hàm số lượng giác sau đây:

$\sin(x+k2\pi)=\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$ $\cos(x+k2\pi)=\cos x, \forall x\in\mathbb{R}$

$\tan(x+k\pi)=\tan x, \forall x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\cot(x+k\pi)=\cot x, \forall x\neq k\pi$

Bài 3. Giải các phương trình sau

❶ $\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x}=\sqrt{2}\sin x\sin 2x$ ❷ $3\sin x+2\cos x=3(1+\tan x)-\frac{1}{\cos x}$

❸ $\cos 3x.\tan 5x=\sin 7x$ ❹ $\tan 5x\tan 2x=1$

Hướng dẫn giải

① Điều kiện: $\sin x\neq 0\Leftrightarrow\cos x\neq\pm 1$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$\sin^2 x(1+\sin 2x+\cos 2x)=2\sqrt{2}\sin^2 x\cos x\Leftrightarrow 1+2\sin x\cos x+2\cos^2 x-1=2\sqrt{2}\cos x$

$\Leftrightarrow 2\cos x(\sin x+\cos x-\sqrt{2})=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\text{ (t/m)}\ \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ \sin x+\cos x=0\ (*)\end{array}\right.$

Dùng mệnh đề phủ định: Giả sử $\sin x=0\Leftrightarrow\cos x=\pm 1$, khi đó $(*)\Leftrightarrow 0\pm 1=\sqrt{2}$ (vô lí). Tức là các nghiệm của (*) đều thỏa mãn. Giải (*) ta được: $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, x=\frac{\pi}{4}+k2\pi.$

② Điều kiện: $\cos x\neq 0\Leftrightarrow\sin x\neq\pm 1$. Khi đó phương trình đã cho trở thành

$\Rightarrow\cos x(3\sin x+2\cos x)=3(\sin x+\cos x)-1$

$\Leftrightarrow\cos x(3\sin x+2\cos x)-\cos x=3\sin x+2\cos x-1$

$\Leftrightarrow(3\sin x+2\cos x-1)(\cos x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=1\text{ (t/m)}\Leftrightarrow x=k2\pi\\ 3\sin x+2\cos x=1\ (*)\end{array}\right.$

Xét (*): Giả sử $\cos x=0\Leftrightarrow\sin x=\pm 1.$, khi đó $(*)\Leftrightarrow\pm 3-1=0$ (vô lí). Tức là các nghiệm của (*) đều thỏa mãn. Giải (*) ta được: $x=\alpha\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}+k2\pi$ (với $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}};\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}}$).

Vậy phương trình có nghiệm: $x=k2\pi, x=\alpha\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{13}}+k2\pi.$

③ Điều kiện: $\cos 5x\neq 0\Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{10}+m\frac{\pi}{5}, (m\in\mathbb{Z})$. Khi đó phương trình trở thành

$2\sin 5x\cos 3x=2\sin 7x\cos 5x\Leftrightarrow\sin 8x=\sin 12x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\frac{\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{20}+k\frac{\pi}{10}\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$

+ Giả sử $k\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{10}+m\frac{\pi}{5}\Leftrightarrow 5k=1+2m$ (*). Suy ra $m=2k+\frac{k-1}{2}$.

Mặt khác, do $k,m\in\mathbb{Z}$ nên tồn tại $s\in\mathbb{Z}$ sao cho: $s=\frac{k-1}{2}\Leftrightarrow k=2s+1$ (tức k là số lẻ).

Suy ra $x = k\dfrac{\pi}{2}$ là nghiệm PT khi $k \neq 2s+1$. Chọn $k = 2s$ thu được nghiệm là $x = s\pi \ \ (s \in \mathbb{Z})$.

+ Giả sử $\dfrac{\pi}{20} + k\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\pi}{10} + m\dfrac{\pi}{5} \Leftrightarrow 2k - 4m = 1 \Leftrightarrow k - 2m = \dfrac{1}{2}$ (**).

Ta nhận thấy $k - 2m \in \mathbb{Z}$, $\dfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ nên không tồn tại $k, m \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn (**).

Do đó $x = \dfrac{\pi}{20} + k\dfrac{\pi}{10}$ là nghiệm của PT với mọi $k \in \mathbb{Z}$.

Vậy phương trình có nghiệm: $x = s\pi$ và $x = \dfrac{\pi}{20} + k\dfrac{\pi}{10} \ \ (k, s \in \mathbb{Z})$.

④ Điều kiện: $\begin{cases} \cos 5x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{10} + m\dfrac{\pi}{5} & (1) \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2} & (2) \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$.

PT $\Leftrightarrow \tan 5x = \dfrac{1}{\tan 2x} \Leftrightarrow \tan 5x = \cot 2x \Leftrightarrow \tan 5x = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7}$.

+ Đối chiếu điều kiện (1):

Giả sử $\dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{\pi}{10} + m\dfrac{\pi}{5} \Leftrightarrow k = m + \dfrac{1+2m}{5}$ (*)

Do $k, m \in \mathbb{Z}$ nên tồn tại $t \in \mathbb{Z}$ sao cho: $t = \dfrac{1+2m}{5} \Leftrightarrow m = 2t + \dfrac{t-1}{2}$

Mặt khác, do $t, m \in \mathbb{Z}$ nên tồn tại $s \in \mathbb{Z}$ sao cho: $s = \dfrac{t-1}{2} \Leftrightarrow t = 2s + 1$.

Thay vào (*) ta được: $k = 7s + 3$. Do đó $x = \dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7}$ thỏa mãn điều kiện (*) với $k \neq 7s + 3$.

+ Đối chiếu điều kiện (2):

Giả sử $\dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7} = \dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow 4k - 14n = 5$ (**).

Ta nhận thấy vế trái (**) là số chẵn, vế phải (**) là số lẻ nên không tồn tại $k, n \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn điều kiện (**). Do đó $x = \dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7}$ luôn thỏa mãn điều kiện (**).

Vậy phương trình có nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{14} + k\dfrac{\pi}{7}$ với $k \neq 7s + 3$.

LƯỢNG GIÁC TRONG ĐỀ THI 2002 - 2014

Bài 1 (ĐH A2002) Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0;\, 2\pi)$ của phương trình :

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3.$$ **ĐS :** $x = \frac{\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{3}$

Bài 2 (ĐH B2002) Giải phương trình :

$$\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$$ **ĐS :** $x = \frac{k\pi}{9}; x = \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 3 (ĐH D2002) Tìm x thuộc đoạn $\left[0;14\right]$ nghiệm đũng của phương trình :

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$$ **ĐS :** $x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{2}$

Bài 4 (ĐH A2003) Giải phương trình :

$$\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$$ **ĐS :** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 5 (ĐH B2003) Giải phương trình :

$$\cot x - \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$$ **ĐS :** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 6 (ĐH D2003) Giải phương trình:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cot^2\frac{x}{2} = 0.$$ **ĐS :** $x = \pi + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Bài 7 (ĐH A2004) Cho tam giác ABC không tù, thỏa mãn điều kiện

$$\cos 2A + 2\sqrt{2}\cos B + 2\sqrt{2}\cos C = 3.$$

Tính ba góc của tam giác ABC. **ĐS :** $A = 90^0; B = C = 45^0$

Bài 8 (ĐH B2004) Giải phương trình:

$$5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$$ **ĐS :** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 9 (ĐH D2004) Giải phương trình:

$$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$ **ĐS :** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Bài 10 (ĐH A2005) Giải phương trình:

$$\cos^2 3x\cos 2x - \cos^2 x = 0$$ **ĐS :** $x = \frac{k\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 11 (ĐH B2005) Giải phương trình:

$$1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$$ **ĐS :** $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

Bài 12 (ĐH D2005) Giải phương trình:

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$$ **ĐS :** $x = \frac{\pi}{4} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 13 (ĐH A2006) Giải phương trình:

$$\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x\cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$$ **ĐS :** $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 14 (ĐH B2006) Giải phương trình:

$$\cot x + \sin x\left(1 + \tan x \tan\frac{x}{2}\right) = 4 \qquad \textbf{ĐS}: x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$$

Bài 15 (ĐH D2006) Giải phương trình:

$$\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0 \qquad \textbf{ĐS}: x = k\pi; x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi$$

Bài 16 (ĐH A2007) Giải phương trình:

$$\left(1 + \sin^2 x\right)\cos x + \left(1 + \cos^2 x\right)\sin x = 1 + \sin 2x \qquad \textbf{ĐS}: x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 17 (ĐH B2007) Giải phương trình

$$2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x \qquad \textbf{ĐS}: x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}; x = \frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}; x = \frac{5\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3}$$

Bài 18 (ĐH D2007) Giải phương trình :

$$\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2 \qquad \textbf{ĐS}: x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 19 (ĐH A2008) Giải hệ phương trình:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right) \qquad \textbf{ĐS}: x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = -\frac{\pi}{8} + k\pi; x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$$

Bài 20 (ĐH B2008) Giải phương trình:

$$\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^3 x = \sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x\cos x \qquad \textbf{ĐS}: x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

Bài 21 (ĐH D2008) Giải phương trình:

$$2\sin x\left(1 + \cos 2x\right) + \sin 2x = 1 + 2\cos x \qquad \textbf{ĐS}: x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

Bài 22 (ĐH A2009) Giải phương trình:

$$\frac{\left(1 - 2\sin x\right)\cos x}{\left(1 + 2\sin x\right)\left(1 - \sin x\right)} = \sqrt{3} \qquad \textbf{ĐS}: x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Bài 23 (ĐH B2009) Giải phương trình:

$$\sin x + \cos x\sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\left(\cos 4x + \sin^3 x\right) \qquad \textbf{ĐS}: x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{\pi}{42} + \frac{k2\pi}{7}$$

Bài 24 (ĐH D2009) Giải phương trình:

$$\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x\cos 2x - \sin x = 0 \qquad \textbf{ĐS}: x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$$

Bài 25 (ĐH A2010) Giải phương trình :

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x)\sin(x + \frac{\pi}{4})}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x \qquad \textbf{ĐS}: x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$$

Bài 26 (ĐH B2010) Giải phương trình:

$$(\sin 2x + \cos 2x)\cos x + \cos 2x - \sin x = 0 \qquad \textbf{ĐS}: x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}(k \in \mathbb{Z})$$

Bài 27 (ĐH D2010) Giải phương trình:

$\sin 2x - \cos 2x + 3\sin x - \cos x - 1 = 0$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$

Bài 28 (ĐH A2011) Giải phương trình:

$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x \sin 2x$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$

Bài 29 (ĐH B2011) Giải phương trình:

$\sin 2x\cos x + \sin x\cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$ **ĐS :** $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}$

Bài 30 (ĐH D2011) Giải phương trình :

$\frac{\sin 2x + 2\cos x - \sin x - 1}{\sqrt{3} + \tan x} = 0$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 31 (ĐH A2012) Giải phương trình :

$\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi; x = k2\pi; x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi$

Bài 32 (ĐH B2012) Giải phương trình:

$2(\cos x + \sqrt{3}\sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1$ **ĐS:** $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{k2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 33 (ĐH D2012) Giải phương trình:

$\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 2x$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi; x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi$

Bài 34 (ĐH A2013) Giải phương trình:

$1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi$

Bài 35 (ĐH B2013) Giải phương trình:

$\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$ **ĐS:** $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3}; x = -\frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7}$

Bài 36 (ĐH D2013) Giải phương trình

$\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$ **ĐS:** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$

Bài 37 (ĐH A2014) Giải phương trình

$\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$ **ĐS :** $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Bài 38 (ĐH B2014) Giải phương trình

$\sqrt{2}(\sin x - 2\cos x) = 2 - \sin 2x$ **ĐS :** $x = \pm\frac{3\pi}{4} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

--Hết--